

Πρ. 1 Η $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Bolzano-Weierstraß δείξτε ότι η f είναι φραγμένη στο $[0, 1]$. Μην επικαλεστείτε κάποιο άλλο θεώρημα.

Λύση: Ας είναι $M \in [0, +\infty]$ το supremum της $|f(x)|$ για $x \in [0, 1]$. Άρα υπάρχει ακολουθία σημείων $x_n \in [0, 1]$ τέτοια ώστε $|f(x_n)| \rightarrow M$. Από το θεώρημα Bolzano-Weierstraß υπάρχει υπακολουθία της x_n η οποία συγκλίνει σε κάποιο $a \in [0, 1]$. Από τη συνέχεια της f προκύπτει τότε το όριο της $|f|$ πάνω σε αυτή την υπακολουθία είναι $|f(a)|$. Άρα $M = |f(a)|$ και το M είναι αναγκαστικά πεπερασμένο, οπότε η f είναι φραγμένη.

Σχόλια: Η ίδια η παραπάνω απόδειξη δίνει και ότι το supremum της συνάρτησης «πιάνεται» κάπου στο $[0, 1]$.

Πρ. 2 Η $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$. Δείξτε ότι είναι φραγμένη στο $(0, 1)$.

Λύση: Λύση Νο 1: Στον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας παίρνουμε $\epsilon = 1$ οπότε το $\delta > 0$ είναι τέτοιο ώστε

$$|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq 1.$$

Αν $x \in (0, 1)$ ας είναι $\Delta = \left|x - \frac{1}{2}\right|$ η απόστασή του από το $1/2$. Στο διάστημα ανάμεσα στα $1/2$ και x τοποθετούμε σημεία x_1, x_2, \dots, x_k τέτοια η απόσταση του x από το x_1 να είναι $\leq \delta$, η απόσταση του x_1 από το x_2 να είναι $\leq \delta$, κλπ, και τέλος η απόσταση του x_k από το $1/2$ να είναι $\leq \delta$. Εύκολα βλέπουμε ότι το πλήθος k των σημείων που θα χρειαστεί να βάλουμε ανάμεσα στα x και $1/2$ είναι το πολύ $k \leq \Delta/\delta$, και αφού $\Delta \leq 1/2$ έπεται ότι $k \leq \left\lceil \frac{1}{2\delta} \right\rceil$. Έχουμε τώρα

$$\begin{aligned}
 |f(x)| &\leq |f(x) - f(1/2) + f(1/2)| \\
 &\leq |f(x) - f(1/2)| + |f(1/2)| \\
 &= |f(x) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_2) + \dots + f(x_k) - f(1/2)| + |f(1/2)| \\
 &\leq |f(x) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \dots + |f(x_k) - f(1/2)| + |f(1/2)| \\
 &\leq 1 + 1 + \dots + 1 + |f(1/2)| \\
 &= k + 1 + |f(1/2)| \\
 &\leq \left\lceil \frac{1}{2\delta} \right\rceil + 1 + |f(1/2)|.
 \end{aligned}$$

Δείξαμε ότι το $|f(x)|$ φράσσεται από μια ποσότητα που δεν εξαρτάται από το x , άρα η f είναι φραγμένη.

Λύση Νο 2: Στον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας παίρνουμε $\epsilon = 1$ οπότε το $\delta > 0$ είναι τέτοιο ώστε

$$|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq 1.$$

Έστω $a = \delta/2, b = 1 - \delta/2$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$ άρα και φραγμένη εκεί, οπότε ας είναι $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$. Ας είναι τώρα $y \in (0, a)$ (και ομοίως αν $y \in (b, 1)$). Τότε $|y - a| < \delta$ άρα $|f(y) - f(a)| \leq 1$ οπότε $|f(y)| \leq |f(a)| + 1 \leq M + 1$. Άρα σε όλο το $(0, 1)$ η $|f|$ φράσσεται από το $M + 1$.

Πρ. 3 Έχουμε $f(x) = e^x$, για $x \in [0, 1]$, N ένας μεγάλος φυσικός αριθμός και η διαμέριση \mathcal{P}_N του $[0, 1]$ σε N διαστήματα μήκους $1/N$ το καθένα. Υπολογίστε το κάτω Riemann άθροισμα της f στο $[0, 1]$ για τη διαμέριση \mathcal{P}_N . Ο τύπος που θα βρείτε θα πρέπει να είναι όσο γίνεται πιο απλός και να είναι φυσικά συνάρτηση μόνο του N . Βρείτε έπειτα το όριο αυτής της ποσότητας για $N \rightarrow \infty$.

Λύση: Τα σημεία της διαμέρισης είναι τα

$$t_0 = 0, t_1 = 1/N, t_2 = 2/N, \dots, t_k = k/N, \dots, t_{N-1} = (N-1)/N, t_N = 1.$$

Επειδή η συνάρτηση είναι αύξουσα το infimum της σε ένα διάστημα είναι η τιμή της στο αριστερό σημείο του διαστήματος. Άρα

$$\begin{aligned} L(f, \mathcal{P}_N) &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} e^{k/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (e^{1/N})^k \\ &= \frac{1}{N} \frac{1 - e^{N/N}}{1 - e^{1/N}} \quad \text{από τον τύπο } 1 + a + a^2 + \dots + a^{N-1} = \frac{1 - a^N}{1 - a}, \text{ για } a \neq 1, \\ &= \frac{1 - e}{N(1 - e^{1/N})}. \end{aligned}$$

Ο παρανομαστής της τελευταίας ποσότητας είναι ο $\frac{1 - e^{1/N}}{1/N}$ του οποίου το όριο για $N \rightarrow \infty$ ισούται με το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^x}{x}$ που εύκολα υπολογίζεται ότι ισούται με -1 . Άρα

$$\lim_{N \rightarrow \infty} L(f, \mathcal{P}_N) = e - 1,$$

το οποίο εύκολα αναγνωρίζουμε ως το ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^x dx$.

Πρ. 4 Αν $f(x) = ax$ (όπου $a > 0$ είναι μια σταθερά), δείξτε ότι αν \mathcal{P} είναι μια διαμέριση του $[1, 2]$ και L, U τα κάτω και άνω Riemann αθροίσματα για την f που αντιστοιχούν στη διαμέριση \mathcal{P} δείξτε ότι η ποσότητα $(L + U)/2$ δεν εξαρτάται από τη διαμέριση \mathcal{P} .

Λύση: Σε κάθε διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$ της διαμέρισης το γράφημα της συνάρτησης είναι μια ευθεία με θετική κλίση, άρα το infimum πιάνεται στο αριστερό άκρο του διαστήματος και το supremum στο δεξί. Η συνεισφορά του διαστήματος $[t_i, t_{i+1}]$ στο $L(f, \mathcal{P})$ είναι το εμβαδό του ορθογωνίου με βάση το διάστημα αυτό και ύψος $f(t_i)$, ενώ η συνεισφορά του διαστήματος αυτού στο $U(f, \mathcal{P})$ είναι το εμβαδό του ορθογωνίου με βάση το διάστημα και ύψος $f(t_{i+1})$. Άρα η συνεισφορά του $[t_i, t_{i+1}]$ στο μέσο όρο $(L + U)/2$ είναι

$$(t_{i+1} - t_i) \frac{f(t_i) + f(t_{i+1})}{2},$$

ή, με άλλα λόγια, το εμβαδό του τραpezίου που είναι το χωρίο κάτω από το γράφημα και πάνω από τον άξονα των x . Άρα η ποσότητα $(L + U)/2$ ισούται ακριβώς με το εμβαδό κάτω από το γράφημα της συνάρτησης και πάνω από το διάστημα $[1, 2]$ στον άξονα των x , και συνεπώς δεν εξαρτάται από τη διαμέριση.

Πρ. 5 Η $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ (πλευρικές παράγωγοι στα άκρα). Δείξτε ότι υπάρχει μια σταθερά M τέτοια ώστε αν \mathcal{P} είναι μια διαμέριση

του $[0, 1]$, με όλα τα διαστήματά της μήκους $\leq \epsilon$, και L, U τα κάτω και άνω Riemann αθροίσματα της f για αυτή τη διαμέριση τότε $U - L \leq M\epsilon$.

Λύση: Αφού η f' είναι συνεχής στο $[0, 1]$ είναι και φραγμένη, π.χ. με $|f'(x)| \leq M$, άρα (από το Θεώρημα Μέσης Τιμής) η f είναι Lipschitz με σταθερά M , δηλ.

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|,$$

για $x, y \in [0, 1]$. Αν λοιπόν το supremum και το infimum της f στο διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$ της διαμέρισης πάνονται στα σημεία y και z του διαστήματος αντίστοιχα τότε ισχύει από την ιδιότητα Lipschitz παραπάνω ότι $0 \leq f(z) - f(y) \leq M|z - y| \leq M|t_{i+1} - t_i|$, οπότε αν όλα τα διαστήματα της διαμέρισης έχουν μήκος $\leq \epsilon$ τότε ισχύει $0 \leq f(z) - f(y) \leq M\epsilon$ και η συνεισφορά του διαστήματος $[t_i, t_{i+1}]$ στην (μη αρνητική) ποσότητα $U - L$ είναι το πολύ $M\epsilon|t_{i+1} - t_i|$. Αθροίζοντας για όλα τα i παίρνουμε $U - L \leq M\epsilon$ μια και το συνολικό μήκος είναι 1.

Πρ. 6 Έστω $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2}$. Εκφράστε την ποσότητα S_n ως κάτω Riemann άθροισμα μιας κατάλληλης συνάρτησης σε ένα κατάλληλο διάστημα. Αφού το κάνετε αυτό, σε ποια τιμή αναμένετε να συγκλίνει το S_n ;

Λύση: Έχουμε

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{\frac{n^2 - k^2}{n^2}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{1 - (k/n)^2} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sqrt{1 - \left(\frac{i+1}{n}\right)^2},$$

όπου στο τέλος κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $i = k - 1$. Ορίζουμε την φθίνουσα συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, για $x \in [0, 1]$, και παρατηρούμε ότι η άνω ποσότητα γράφεται ως

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{i+1}{n}\right).$$

Ορίζουμε τη διαμέριση \mathcal{P} του $[0, 1]$ χωρίζοντας το διάστημα σε n ίσα διαστήματα και βλέπουμε ότι στο διάστημα $[i/n, (i+1)/n]$ το infimum πιάνεται στο δεξί άκρο (αφού η συνάρτηση είναι φθίνουσα). Άρα το άνω άθροισμα είναι το κάτω Riemann άθροισμα της f γι' αυτή τη διαμέριση. Αναμένουμε λοιπόν την ποσότητα αυτή να συγκλίνει στο ολοκλήρωμα $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$ ή, πιο γεωμετρικά, στο εμβαδό κάτω από την καμπύλη $y = \sqrt{1 - x^2}$ και πάνω από το διάστημα $[0, 1]$ στον άξονα των x . Αυτό όμως είναι το κομμάτι του μοναδιαίου δίσκου στο πρώτο τεταρτημόριο, άρα είναι εμβαδού $\pi/4$.

Πρ. 7 Βρείτε ένα παράδειγμα συνάρτησης $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε η $|f|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$ αλλά η f δεν είναι.

Λύση: Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ έχει infimum ίσο με -1 και supremum ίσο με 1 σε κάθε διάστημα, άρα δεν είναι ολοκληρώσιμη. Όμως η $|f|$ είναι σταθερή συνάρτηση άρα είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Πρ. 8 Βρείτε ένα παράδειγμα ακολουθίας a_n που να ικανοποιεί την ανισότητα $|a_n - a_{n+1}| \leq \frac{1}{n}$ αλλά να μη συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Επίσης βρείτε παράδειγμα ακολουθίας b_n που να ικανοποιεί την ισότητα $|b_n - b_{n+1}| = \frac{1}{n}$ και η b_n να συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Λύση: Ξέρουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ συγκλίνει στο $+\infty$. Με άλλα λόγια, αν $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς αυτής τότε $a_n \rightarrow +\infty$. Αλλά $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n}$, οπότε η a_n έχει τις ιδιότητες που θέλουμε.

Ξέρουμε επίσης ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Άρα η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$ τείνει σε αυτόν τον πραγματικό αριθμό. Ισχύει και πάλι $|b_n - b_{n-1}| = \frac{1}{n}$.

Πρ. 9 Βρείτε μια ακολουθία a_n που να έχει κάθε πραγματικό αριθμό ως σημείο συσσώρευσης.

Λύση: **Λύση Νο 1:** Ξέρουμε ότι οι ρητοί αριθμοί είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να γράψουμε τους ρητούς αριθμούς ως τους όρους μιας ακολουθίας:

$$\mathbb{Q} = \{a_1, a_2, \dots\}.$$

Αφού σε κάθε διάστημα υπάρχουν ρητοί αριθμοί, κάθε πραγματικός αριθμός είναι σημείο συσσώρευσης των ρητών, δηλ. της ακολουθίας a_n .

Λύση Νο 2: Θα ορίσουμε την ακολουθία μας κατασκευάζοντας πεπερασμένα κομμάτια της σε ολοένα και μεγαλύτερα μπλοκ. Αρχίζουμε παίρνοντας το διάστημα $[-1, 1]$ και ορίζοντας τους 10 πρώτους όρους της ακολουθίας μας να είναι στο διάστημα αυτό, ισαπέχοντας (άρα με μεταξύ τους κενό το $2/10$). Στο δεύτερο βήμα παίρνουμε το διάστημα $[-2, 2]$ και ορίζουμε τους 100 επόμενους όρους της ακολουθίας μας να είναι στο διάστημα αυτό και ισαπέχοντας, άρα με κενό ανάμεσά τους το $4/10^2$. Στο τρίτο βήμα παίρνουμε 10^3 ισαπέχοντες όρους στο διάστημα $[-3, 3]$, και γενικά στο βήμα n παίρνουμε 10^n ισαπέχοντες όρους στο διάστημα $[-n, n]$, και άρα με κενό ανάμεσά τους το $2n/10^n$. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται επ' άπειρον.

Έστω $x \in \mathbb{R}$ και $\epsilon > 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει όρος της ακολουθίας στο διάστημα $(x - \epsilon, x + \epsilon)$. Έστω $N = \lceil 10|x| \rceil$ και $M \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\epsilon > 2M/10^M$ (αυτό είναι εφικτό γιατί η ακολουθία $2M/10^M$ τείνει στο 0 με το M). Αν πάρουμε $k = \max\{N, M\}$ τότε σίγουρα κάποιος όρος της ακολουθίας μας από το k βήμα της κατασκευής της θα ανήκει στο διάστημα $(x - \epsilon, x + \epsilon)$.

Πρ. 10 Έστω $I_n = \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$, $J_n = \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$. Υπολογίστε τα παρακάτω σύνολα:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \setminus I_n.$$

Λύση:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = (0, 1).$$

Απόδειξη αυτού: αν $x \leq 0$ ή $x \geq 1$ τότε το x δεν ανήκει σε κανένα I_n άρα ούτε και στην ένωσή τους. Αν $x \in (0, 1)$ έστω

$$\delta = \min \{x, 1 - x\}$$

η απόσταση του x από τα άκρα του διαστήματος $(0, 1)$. Αν $n \in \mathbb{N}$ είναι τέτοιο ώστε $\frac{1}{n} < \delta$ τότε $x \in I_n$, άρα κάθε $x \in (0, 1)$ ανήκει στην παραπάνω ένωση.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = [0, 1].$$

Απόδειξη αυτού: αν $x < 0$ ή $x > 1$ τότε ας είναι

$$\delta = \min \{|x|, |x - 1|\}$$

η απόσταση του x από τα άκρα του διαστήματος $[0, 1]$. Αν $n \in \mathbb{N}$ είναι τέτοιο ώστε $\frac{1}{n} < \delta$ τότε $x \notin J_n$ οπότε δεν ανήκει ούτε στην άνω τομή. Αν $x \in [0, 1]$ τότε ανήκει σε όλα τα J_n οπότε ανήκει και στην άνω τομή.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \setminus I_n = \{0, 1\}.$$

Απόδειξη αυτού: έχουμε $J_n \setminus I_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \cup [1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$. Είναι φανερό ότι τα 0 και 1 ανήκουν σε όλα τα $J_n \setminus I_n$ οπότε ανήκουν και στην τομή. Αν $x \neq 0, 1$ και

$$\delta = \min \{|x|, |x - 1|\}$$

η απόσταση αυτού από τα 0 και 1 τότε αν $n \in \mathbb{N}$ είναι τέτοιο ώστε $\frac{1}{n} < \delta$ τότε $x \notin J_n \setminus I_n$, οπότε το x δεν ανήκει στην άνω τομή.