Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς τους ίδιους. Προσπαθείστε να λύσετε όσο γίνεται περισσότερες πριν έρθετε στα εργαστήρια της Παρασκευής όπου θα σας παρέχεται βοήθεια για τη λύση όσων από αυτές δεν έχετε καταφέρει να λύσετε.

Προσπαθείτε να γράφετε κάτω τα επιχειρήματά σας με τρόπο ώστε να φαίνεται καθαρά ποια πρόταση επικαλείστε κάθε φορά και πώς προκύπτει το κάθε τι το οποίο ισχυρίζεστε.

Φέρτε αυτό το Φυλλάδιο μαζί σας στο εργαστήριο.

Πρ. 1 Αποδείξτε ότι σε κάθε διάστημα (με θετικό μήκος) υπάρχει ρητός αριθμός. Δείξτε γιατί αυτό συνεπάγεται ότι σε κάθε διάστημα (με θετικό μήκος) υπάρχουν άπειροι ρητοί αριθμοί.

Πρ. 2 Βρείτε μια συνάρτηση $f : [10, 20] \to [0, +\infty)$, φραγμένη και Riemann ολοκληρώσιμη, για την οποία να μην ισχύει το «Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρώματος», να μην υπάρχει δηλ. σημείο $a \in [10, 20]$ τ.ώ. $f(a)$ να ισούται με το μέσο όρο της f στο διάστημα αυτό: $(1/10) \int_{10}^{20} f(x)\, dx$.

Πρ. 3 Αποδείξτε ότι η παρακάτω συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x = \frac{1}{n} \text{ για κάποιο } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Υπόδειξη: Πρέπει, αν $\epsilon > 0$, να βρείτε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[0, 1]$ τ.ώ. $U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) \le \epsilon$. Δοκιμάστε μια διαμέριση που το πρώτο της διάστημα από αριστερά να είναι το $[0, \epsilon/2]$ και από κει και πέρα να έχει όλα τα άλλα της διαστήματα ισομήκη με το πλήθος τους να είναι ένας μεγάλος φυσικός αριθμός N. Επιλέξτε το N ώστε να ισχύει η επιθυμητή ανισότητα.

Πρ. 4 Η $f : [0, 1] \to [0, +\infty)$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : [f(1), f(0)] \to [0, 1]$. Δείξτε ότι για κάθε $M \in [f(1), f(0)]$ ισχύει

$$f^{-1}(M) \le \frac{1}{M} \int_0^1 f(x)\, dx.$$

Υπόδειξη: Σχεδιάστε το γράφημα και ερμηνεύστε τις σχετικές ποσότητες ως εμβαδά.

Πρ. 5 Η $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ είναι φθίνουσα, και υπάρχει κάποιος αριθμός M τέτοιος ώστε για κάθε $R > 0$ να ισχύει $\int_0^R f(x)\, dx \le M$. Δείξτε ότι

(1) ισχύει $xf(x) \le M$,

(2) υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο $\lim_{R\to\infty} \int_0^R f(x)\, dx$ και επίσης $\int_R^{2R} f(x)\, dx \to 0$, για $R \to \infty$, και

(3) $xf(x) \to 0$ για $x \to \infty$.

Πρ. 6 Δείξτε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \left(q - \frac{1}{n}, q + \frac{1}{n}\right) = \mathbb{R}$ και επίσης ότι $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(q - \frac{1}{n}, q + \frac{1}{n}\right) = \mathbb{Q}$.

Πρ. 7 (α) Βρείτε μια ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \to [0, +\infty)$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in [0, 1]$ να ισχύει $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ και επίσης $\int_0^1 f_n(x)\, dx \to \infty$.

(β) Όπως το (α) αλλά οι f_n να είναι επιπλέον συνεχείς στο $[0, 1]$.

Υπόδειξη: Για το (α) δοκιμάστε την ακολουθία $f_n(x) = n^3\chi_{[1/(n+1),1/n]}(x)$ (χ_A είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου A, που είναι 1 εντός του A και 0 εκτός του A).

Πρ. 8 Βρείτε μια ακολουθία συναρτήσεων $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$, τέτοιες ώστε να υπάρχει η παράγωγος $f_n'(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in (0,1)$ και επίσης η ακολουθία f_n να συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια παραγωγίσιμη $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ αλλά να υπάρχει $x \in (0,1)$ για το οποίο να μην ισχύει $f_n'(x) \to f'(x)$. Βρείτε επίσης τέτοιο παράδειγμα για το οποίο να μην ισχύει $f_n'(x) \to f'(x)$ για κανένα $x \in (0,1)$.

Υπόδειξη: Δοκιμάστε $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$.

Πρ. 9 Αποδείξτε ότι το σύνολο όλων των πολυωνύμων

$$p(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_2 x^2 + p_1 x + p_0$$

με ακέραιους συντελεστές $p_j \in \mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμο.

Υπόδειξη: Θα πρέπει να περιγράψετε μια διαδικασία που θα φτιάχνει όλα τα πολυώνυμα αυτά, το ένα μετά το άλλο, και τουλάχιστον μια φορά το καθένα. Έτσι παράγεται μια απαρίθμηση των πολυωνύμων αυτών. Μια ιδέα είναι να χρησιμοποιήσετε την εξής παρατήρηση: για κάθε φυσικό αριθμό N υπάρχουν πεπερασμένα στο πλήθος πολυώνυμα που έχουν και βαθμό (υψηλότερη δύναμη) $\leq N$ αλλά και όλους τους συντελεστές τους κατ' απόλυτη τιμή $\leq N$. Για κάθε πολυώνυμο όπως αυτά που φαίνονται παραπάνω πάρτε $N = \max\{n, |p_0|, |p_1|, \ldots, |p_n|\}$.