

MEM 222 ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 1

Άσκηση 1.1 Έστω ομάδα G και στοιχεία $a, b \in G$ με τάξεις $n, m \in \mathbb{N}$ αντίστοιχα, τα οποία αντιμετατίθενται, δηλαδή $ab = ba$.

α'. Δείξτε ότι $\text{ord}(ab) \mid \text{εκπ}(n, m)$.

β'. Εάν $(n, m) = 1$ δείξτε ότι $\text{ord}(ab) = nm$.

γ'. Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση που ισχύει $(n, m) = 1$ έχουμε $\text{ord}(ab) = \text{εκπ}(n, m)$. Ισχύει αυτό χωρίς την υπόθεση $(n, m) = 1$;

Άσκηση 1.2 Έστω ομάδα G και στοιχείο $a \in G$ τάξης d . Δείξτε ότι $\text{ord}(a^k) = d/(k, d)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$

Άσκηση 1.3 Υπολογίστε την τάξη και το πρόσημο κάθε μίας από τις παρακάτω μεταθέσεις:

α'. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 4 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$,

β'. $\tau = (1\ 3\ 4)(2\ 1\ 5\ 6)(3\ 5\ 8)$,

γ'. $\rho = \sigma\tau^{-1}$.

Άσκηση 1.4 Αποδείξτε τις παρακάτω προτάσεις:

α'. Η \mathbb{S}_n περιέχει μετάθεση τάξης k για κάθε $1 \leq k \leq n$.

β'. Εάν p είναι πρώτος μεγαλύτερος του n , τότε το p δεν διαιρεί την τάξη κανενός στοιχείου της \mathbb{S}_n .

γ'. Η \mathbb{S}_{10} περιέχει στοιχείο τάξης 30 (βρείτε ένα).

δ'. Η \mathbb{S}_9 δεν περιέχει στοιχείο τάξης 30.

Άσκηση 1.5 Βρείτε όλες τις υποομάδες της \mathbb{S}_3 .

Άσκηση 1.6 Γνωρίζουμε ότι $\mathbb{D}_{2n} = \{\tau^k\sigma^i : 0 \leq k \leq 1, 0 \leq i \leq n-1\}$, όπου $\sigma(j) = j+1 \bmod n$ και $\tau(j) = n-j \bmod n$ είναι μεταθέσεις του συνόλου $\{0, 1, \dots, n-1\}$ και $j \bmod n$ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του j με το n .

α'. Γράψτε το στοιχείο $\rho = \sigma^2\tau\sigma^{-1}\tau\sigma^{-1}\tau \in \mathbb{D}_{10}$ στη μορφή $\tau^k\sigma^i$, με $0 \leq k \leq 1, 0 \leq i \leq 4$.

β'. Υπολογίστε το πρόσημο της σ και της τ (ίσως χρειαστεί να εξετάσετε χωριστά τις περιπτώσεις που το n είναι άρτιος ή περιττός).

γ'. Υπολογίστε το πρόσημο της μετάθεσης ρ παραπάνω.

Άσκηση 1.7 Δείξτε ότι η \mathbb{D}_{2n} είναι υποομάδα της \mathbb{A}_n αν και μόνο αν $n \equiv 1 \pmod{4}$.