Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς τους ίδιους. Προσπαθείστε να λύσετε όσο γίνεται περισσότερες πριν έρθετε στα εργαστήρια της Παρασκευής όπου θα σας παρέχεται βοήθεια για τη λύση όσων από αυτές δεν έχετε καταφέρει να λύσετε.

Προσπαθείτε να γράφετε κάτω τα επιχειρήματά σας με τρόπο ώστε να φαίνεται καθαρά ποια πρόταση επικαλείστε κάθε φορά και πώς προκύπτει το κάθε τι το οποίο ισχυρίζεστε.

Φέρτε αυτό το Φυλλάδιο μαζί σας στο εργαστήριο.

Πρ. 1 Με χρήση του $\epsilon - \delta$ ορισμού της συνέχειας δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι συνεχής για $x = 1$.

Πρ. 2 Δώστε ένα παράδειγμα συνάρτησης $f : (1, 2) \to \mathbb{R}$ που να είναι παντού συνεχής στο $(1, 2)$ αλλά όχι φραγμένη στο $(1, 2)$.

Πρ. 3 Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x \cdot \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής παντού. Είναι η $f(x)$ ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$; Ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$;

Πρ. 4 Έστω A ένα σύνολο πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ *δεν είναι φραγμένη* αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $x_n \in A$ τ.ώ. $|f(x_n)| \to +\infty$.

Πρ. 5 Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^x$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, +\infty)$.

Πρ. 6 Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(1, 2)$.

Πρ. 7 Δώστε παράδειγμα μια συνάρτησης $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ που είναι συνεχής και φραγμένη αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$.

Πρ. 8 Αν μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα διάστημα (φραγμένο ή όχι) έχει παντού παράγωγο και $|f'(x)| \le 10$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο πεδίο ορισμού της. (*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα Μέσης Τιμής.)

Πρ. 9 Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \cos x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Πρ. 10 Για την ακολουθία a_n ισχύει $|a_n - a_{n+1}| \le \dfrac{1}{n^2}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η a_n συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Πρ. 11 Έστω $a_n \in \mathbb{R}$ και

$$\mu_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

η ακολουθία των *μέσων όρων* της a_n.

Δείξτε ότι αν $a_n \to a$ τότε και $\mu_n \to a$. Δείξτε επίσης, βρίσκοντας κατάλληλο παράδειγμα ακολουθίας a_n, ότι το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά, ότι μπορεί δηλ. να συγκλίνει η μ_n χωρίς να συγκλίνει η a_n.