Λύσεις των ασκήσεων της τελικής εξέτασης ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ στη λ

Ηράκλειο, 19-1-2019

Θέμα 1° (1° Θ. ισομ.) $\frac{G}{\ker\varphi} \cong H$

– Αν $\ker\varphi = \{1_G\}$, τότε $G \cong H$

– Αν $|\ker\varphi| = p \Rightarrow \left|\frac{G}{\ker\varphi}\right| = p^2/p = p \Rightarrow |H| = p \Rightarrow$ H κυκλική

– Αν $|\ker\varphi| = p^2 \Rightarrow \left|\frac{G}{\ker\varphi}\right| = \frac{p^2}{p^2} = 1 \Rightarrow |H| = 1$, άτοπο

Θέμα 2° Από Θ. Cauchy (ή και από Sylow)

($\exists\, a \in G$ και $ord(a) = p$) ($\exists\, b \in G$, $ord(b) = q$)

Τώρα $(p,q) = 1$ και G = αβελιανή $\Rightarrow ord(a \cdot b) = p \cdot q$

Σημείωση Από την άσκηση λείπει το δεύτερο μέρος, όπου είχε ζητηθεί η μορφή όλων των αβελ. ομάδων τάξης $p^3 \cdot q^2$, αλλά αυτό αφορά πλέον την ιστορία!

Θέμα 3° (α) G όχι αβελιανή, άρα όχι τάξης 1.

$\frac{G}{Z(G)}$ αβελιανή (γιατί;)

Από $[G,G] \leq Z(G) \Rightarrow \frac{G}{Z(G)}$

$\frac{Z_2}{Z(G)} \cong Z\left(\frac{G}{Z(G)}\right) \overset{G/Z(G) = \text{αβελ.}}{=} \frac{G}{Z(G)}$

$Z_2 \leq G$ και $\frac{Z_2}{Z(G)} \cong \frac{G}{Z(G)} \Rightarrow G = Z_2 \Rightarrow G$ μηδενοδ. τάξης 2

(b) $875 = 5^3 \cdot 7$

$N(5^3) \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow N(5^3) = 1 + 5k \mid 7$, $(k \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow k = 0 \Rightarrow N(5^3) = 1 \Rightarrow H_1 := Syl(5^3) \trianglelefteq G$

Επίσης $N(7) \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 1 + 7 \cdot l \mid 125$ $(l \in \mathbb{Z})$

για $(l \geq 1)$ $1 + 7l \nmid 125$ (γιατί)

άρα $H_2 = Syl(7) \trianglelefteq G$

Τελικά $G = H_1 \times H_2 \Rightarrow G$ μηδενοδύναμη

Θέμα 4° (α) Ἡ A_4 έχει ως στοιχεία:

– 8 3-κύκλους (τάξης 3)

– 3 στοιχεία τάξης 2, τα $(12)(34)$, $(13)(24)$, $(14)(23)$

και το μοναδιαίο. Άρα η V μοναδική υποομάδα της A_4 τάξης 4.

(Επειδή είναι και η Sylow 2-υποομ. της A_4 $\Rightarrow V \trianglelefteq A_4$)

(b) Έχει αποδειχθεί στο μάθημα.

Θέμα 5° (α) Το πιό απλό παράδειγμα είναι η S_3: είναι επιλύσιμη (Θέμα 4,(b)) αλλά δεν είναι μηδενοδύναμη αφού δεν έχει μοναδική Sylow 2-υποομάδα.

(b) Από Θέμα 4(α) και την παρατήρηση ότι $\forall \varphi \in Aut G$, αν $\alpha \in G \Rightarrow ord(\alpha) = ord\,\varphi(\alpha)$

$\Rightarrow V$ χαρακτηριστική της A_4 (A_4)

$[S_4 : A_4] = 2 \Rightarrow A_4 \trianglelefteq S_4$

$\xrightarrow[\text{θεώρ.}]{\text{γνωστό}} V \trianglelefteq S_4$

Θέμα 6° (α) Αν G μηδενοδ. και $H \leq G \Rightarrow H \lneqq N_G(H)$ (1)

Επομένως και για την M ισχύει $M \lneqq N_G(M)$

Ορισμός της maximality: $\Rightarrow N_G(M) = G$.

Συνεπώς $M \trianglelefteq N_G(M) = G$

(b) Εδώ σας έχει υποδειχθεί (προφορικά) ότι $\forall \varphi \in Aut G \Rightarrow \varphi(M)$ επίσης maximal της G (απόδειξη)

Συνεπώς! $\forall \varphi \in G \Rightarrow \varphi(\Phi(G)) \leq \Phi(G) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi(G)$ χαρακτηριστική της G

(c) M maximal της $G \Rightarrow M \trianglelefteq G$ και (από 3° Θ. ισομ.) $\frac{G}{M}$ υποομ.

$\xRightarrow{!}$ κατ' ανάγκη $\frac{G}{M}$ απλή, G πεπερ $\Rightarrow G/M$ πεπερ

$[G/M$ πεπερ. και απλή$] \Rightarrow G/M$ κυκλική (τάξης πρώτου αριθ.)

Άρα $\frac{G}{M}$ αβελιανή. | Από τον χαρακτηρισμό της ομάδας μεταθετών $\Rightarrow [G,G] \leq M$. Αυτό ισχύει για κάθε maximal M της $G \Rightarrow [G,G] \leq \bigcap_{M \max} M = \Phi(G)$ //