

# Θεωρία Ομάδων

Εξέταση, 18-1-2019

Θέμα 1<sup>ο</sup> Έστω  $G$  ομάδα τάξης  $p^2$ ,  $p \in \mathbb{P}$   
και  $H$  ομάδα τάξης  $\geq 2$ . Υποθέτουμε

(1.5) ότι υπάρχει  $\varphi: G \rightarrow H$  επιμορφισμός ομάδων. Να αποδείξετε ότι η ομάδα  $H \cong G$  είτε  $H$  είναι κυκλική.

Θέμα 2<sup>ο</sup> Αν  $G$  αβελιανή ομάδα τάξης  $p^3 \cdot q^2$

όπου  $p, q \in \mathbb{P}$ ,  $p \neq q$ , να αποδείξετε ότι  
(1.5) η ομάδα  $G$  έχει ένα τουλάχιστο βροχείο τάξης  $p \cdot q$ .

Θέμα 3<sup>ο</sup> (α) Αν  $G$  όχι αβελιανή ομάδα τέτοια ώστε  $[G, G] \leq Z(G)$ , να

(1) αποδείξετε ότι η  $G$  είναι μηδενοδύναμη τάξης 2.

(1) (β) Να αποδείξετε ότι κάθε ομάδα τάξης 875 είναι μηδενοδύναμη.

Θέμα 4<sup>ο</sup> (α) Να αποδείξετε ότι η ομάδα του

(1) Κλείν  $V$  είναι η μοναδική υποομάδα της  $A_4$  τάξης 4.

(β) Να αποδείξετε ότι οι ομάδες

(1)  $S_3$ ,  $A_4$  και  $S_4$  είναι επιλύσιμες.