

# ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ

## Ασκήσεις Φυλλάδιο 1°

1) Έξετάστε ποια από τα ακόλουθα σύνολα, με την αντίστοιχη πράξη, έχουν τη δομή ομάδας.

(i)  $G = \mathbb{Z}$ ,  $a * b = \max\{a, b\}$

(ii)  $G = \mathbb{Z}$ ,  $a * b = a - b$

(iii)  $G = \mathbb{R}^+$ ,  $a * b = a \cdot b$

(iv)  $G = \mathbb{Q}$ ,  $a * b = a \cdot b$

(v)  $G = GL_2(\mathbb{R})$ , (vi)  $G = GL_2(\mathbb{Z})$

(vii)  $G = SL_2(\mathbb{R})$  (viii)  $G = SL_2(\mathbb{Z})$

(ix)  $G = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = \begin{bmatrix} m & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, m, b \in \mathbb{R}, m \neq 0 \right\}$

(Στα (v), (vi), (vii), (viii), και (ix) η πράξη

είναι ο πολλαπλασιασμός τεσσάρων

2. Στο σύνολο  $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$

ορίζουμε πράξη  $(a, b) \circ (c, d) = (ac, b + d)$

Να αποδείξετε ότι η  $(G, \circ)$  είναι, μη-αβελιανή, ομάδα

Στη συνέχεια να εξετάσετε ποια  
από τα παρακάτω υποβόνομα της  $G$ ,  
είναι υποομάδες αυτής

$$(i) H_1 = \{ (a, l(a-1)) \mid a \neq 0 \}$$

( $l \in \mathbb{R}, l = \text{γραμμένο}$ )

$$(ii) H_2 = \{ (a, 0) \mid a > 0 \}$$

$$(iii) H_3 = \{ (a, l \cdot a^2) \mid a \neq 0 \} \quad (l \in \mathbb{R}, l = \text{γραμμένο})$$

$$(iv) H_4 = \{ (1, b) \mid b \in \mathbb{R} \}$$

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι  
η  $G$  έχει άπειρα στοιχεία τάξης 2  
Έχει η ομάδα  $G$  στοιχεία τάξης 3;

Ηράκλειο, 26-9-2018

Ιωάννης Α. Αντωνιάδης