ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Περιληπτική λύση των ασκήσεων του 23ου φυλλαδίου

(α′) Υπολογίζω $L(u_1) = f(u_1) = (1, 2, 3)$ και $L(u_2) = f(u_2) = (0, 1, 1)$. Προφανώς, τα $L(u_1), L(u_2)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και, εξ ορισμού του W, τα $L(u_1), L(u_2)$ παράγουν τον W, άρα το $\mathcal{B} = \{L(u_1), L(u_2)\}$ είναι βάση του W.

(β′) Βλέπομε, με τον τρόπο που ξέρομε, ότι η τάξη του πίνακα $\left(\begin{array}{c|c|c} L(u_1) & L(u_2) & w_1 \end{array} \right)$ είναι 2, ίση δηλαδή με την τάξη του πίνακα $\left(\begin{array}{c|c} L(u_1) & L(u_2) \end{array} \right)$ άρα $w_1 \in \langle L(u_1), L(u_2)\rangle = W$. Ανάλογα βλέπομε ότι $w_2 \in \langle L(u_1), L(u_2)\rangle = W$.

Από το (α′) προκύπτει ότι $\dim W = 2$ και, αφού το $C = \{w_1, w_2\} \subset W$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, έπεται ότι το $\mathcal{B}$ είναι βάση του W (πρόταση 5 (α′) της 11ης εβδομάδας).

(γ′) Οι στήλες του πίνακα ${}_C(\mathrm{id})_\mathcal{B}$ είναι οι $L(u_1)_C$ και $L(u_2)_C$, άρα πρέπει να γράψομε τα $L(u_1), L(u_2)$ ως γραμμικούς συνδυασμούς των w_1, w_2. Παρόμοια θέματα έχομε δει σε πολλές ασκήσεις, π.χ. άσκηση 1 του 6ου φυλλαδίου (4η εβδομάδα). Έτσι υπολογίζομε $L(u_1) = 3w_1 - w_2$ και $L(u_2) = 2w_1 - w_2$, οπότε ${}_C(\mathrm{id})_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Αν για το w η στήλη συντεταγμένων ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ είναι $w_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$, πράγμα που σημαίνει ότι $w = \lambda_1 L(u_1) + \lambda_2 L(u_2)$, τότε από τη θεωρία της 12ης εβδομάδας,
$w_C = {}_C(\mathrm{id})_\mathcal{B} \cdot w_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix}$, που σημαίνει ότι
$w = (3\lambda_1 + 2\lambda_2)w_1 + (-\lambda_1 - \lambda_2)w_2$.

(δ′) Προφανώς τα u_1, u_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και παράγουν τον U, άρα το $\mathcal{A} = \{u_1, u_2\}$ είναι βάση του U. Ο πίνακας ${}_C M_\mathcal{A}$ έχει στήλες τις $M(u_1)_C$ και $M(u_2)_C$, άρα ${}_C M_\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$. Αν οι συντεταγμένες του u ως προς τη βάση $\mathcal{A}$ είναι $u_\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$, τότε, από τη θεωρία της 12ης εβδομάδας, $M(u)_C = ({}_C M_\mathcal{A}) \cdot u_\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ 7\lambda_1 + 5\lambda_2 \end{pmatrix}$, που σημαίνει ότι $M(u) = (4\lambda_1 + 3\lambda_2)w_1 + (7\lambda_1 + 5\lambda_2)w_2$.

(ε′) Για να δείξομε ότι η M είναι $1 - 1$, αρκεί $\ker M = \{\bar{0}\}$. Η τελευταία σχέση ισχύει: Πράγματι, έστω $u \in \ker M$. Γράφομε $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ και από το ερώτημα (δ′) έχομε ότι $M(u) = (4\lambda_1 + 3\lambda_2)w_1 + (7\lambda_1 + 5\lambda_2)w_2$. Αλλά $M(u) = \bar{0}$ και τα w_1, w_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, οπότε $4\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$ και $7\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0$. Το ομογενές αυτό σύστημα με αγνώστους λ_1, λ_2 έχει πίνακα συντελεστών, του οποίου η ορίζουσα είναι $\neq 0$, συνεπώς

μοναδική λύση είναι η $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, άρα και $u = \bar{0}$.
Επίσης, η M είναι "επί". Πράγματι, αφού η M είναι $1-1$ και τα u_1, u_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, το ίδιο ισχύει και για τα $M(u_1), M(u_2)$. Συνεπώς ο υπόχωρος $M(U)$ έχει διάσταση 2 και περιέχεται στον W, ο οποίος έχει διάσταση 2. Από την πρόταση 2 της 12ης εβδομάδας, $M(U) = W$, δηλαδή, η M είναι "επί". Δείξαμε ότι είναι και $1-1$, άρα η M είναι ισομορφισμός.
Από τη θεωρία ξέρομε ότι ${}_{\mathcal{A}}(M^{-1})_{C} = ({}_{C}M_{\mathcal{A}})^{-1} =$ (ερώτημα (δ′)) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$.
Αν $w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$, τότε $w_C = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$, άρα $M^{-1}(w)_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{A}}(M^{-1})_C \cdot w_C = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} -5\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ 7\lambda_1 - 4\lambda_2 \end{pmatrix}$, που σημαίνει ότι $M^{-1}(w) = (-5\lambda_1 + 3\lambda_2)u_1 + (7\lambda_1 - 4\lambda_2)u_2$.