

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Άσκηση για το εργαστήριο της Τρίτης 18 Δεκεμβρίου

Έστω $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση με πίνακα, ως προς την κανονική (standard) βάση του \mathbb{R}^3 τον $f_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Έστω $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (1, -1, 1)$, $U = \langle u_1, u_2 \rangle$, $L = f|_U$

(δηλαδή L είναι ο περιορισμός της f στον υπόχωρο U) και $W = L(U)$.

(α') Δείξτε ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \{L(u_1), L(u_2)\}$ είναι βάση του W .

(β') Αποδείξτε ότι τα $w_1 = (1, 1, 2)$, $w_2 = (2, 1, 3)$ ανήκουν στον W και, στη συνέχεια, ότι το σύνολο $\mathcal{C} = \{w_1, w_2\}$ είναι βάση του W .

Χρήσιμη παρατήρηση: $W = L(U) = \langle L(u_1), L(u_2) \rangle$.

(γ') Υπολογίστε τον πίνακα ${}_C(\text{id})_{\mathcal{B}}$ μετάβασης από τη βάση \mathcal{B} στη βάση \mathcal{C} , καθώς και τον πίνακα ${}_{\mathcal{B}}(\text{id})_{\mathcal{C}}$ μετάβασης από τη βάση \mathcal{C} στη βάση \mathcal{B} . Αν το διάνυσμα $w \in W$ έχει συντεταγμένες (λ_1, λ_2) ως προς τη βάση \mathcal{B} , ποιες είναι οι συντεταγμένες του w ως προς τη βάση \mathcal{C} ;

(δ') Παρατηρήστε ότι το σύνολο $\mathcal{A} = \{u_1, u_2\}$ είναι βάση των U . Έστω η γραμμική απεικόνιση $M : U \rightarrow W$ που ορίζεται από τις σχέσεις: $M(u_1) = 4w_1 + 7w_2$ και $M(u_2) = 3w_1 + 5w_2$. Υπολογίστε τον πίνακα ${}_C M_{\mathcal{A}}$. Στη συνέχεια, έστω $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ και $M(u) = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2$. Υπολογίστε τα μ_1, μ_2 συναρτήσει των λ_1, λ_2 .

(ε') Δείξτε ότι η απεικόνιση $M : U \rightarrow W$ του ερωτήματος (δ') είναι ισομορφισμός. Υπολογίστε τον πίνακα ${}_{\mathcal{A}}(M^{-1})_{\mathcal{C}}$. Στη συνέχεια, έστω $w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$ και $M^{-1}(w) = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2$. Υπολογίστε τα μ_1, μ_2 συναρτήσει των λ_1, λ_2 .