ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις για το εργαστήριο της Πέμπτης 13 Δεκεμβρίου

1. Στο μάθημα έχομε αποδείξει ότι, αν ένα σύνολο S παράγει ένα διανυσματικό χώρο, τότε το S περιέχει μια βάση αυτού του χώρου. Αυτή η άσκηση μας δείχνει έναν αλγόριθμο για να βρούμε μια τέτοια βάση όταν το S είναι πεπερασμένο.

   Έστω διανυσματικός χώρος V που παράγεται από το σύνολο $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$, όπου τα $u_1, \ldots, u_n$ είναι μη μηδενικά διανύσματα του V. Ορίζομε αναδρομικά τα υποσύνολα $B_1, \ldots B_n$ του V ως εξής: $B_1 = \{u_1\}$. Για $k > 1$ ορίζομε

$$B_k = \begin{cases} B_{k-1} \cup \{u_k\} & \text{αν το σύνολο } B_{k-1} \cup \{u_k\} \text{ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο} \\ B_{k-1} & \text{αν το σύνολο } B_{k-1} \cup \{u_k\} \text{ είναι γραμμικώς εξαρτημένο} \end{cases}.$$

   Αποδείξτε ότι το B_n είναι βάση του V.

   Εφαρμογή. Με τον παραπάνω αλγόριθμο υπολογίστε στον $\mathbb{R}^4$ μια βάση του υποχώρου V που παράγεται από το σύνολο $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, όπου $u_1 = (1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 2, 3, -1)$, $u_3 = (2, 0, -3, 1)$, $u_4 = (1, -1, -1, 0)$, $u_5 = (3, 1, 1, -1)$.

   Υπόδειξη. Θυμηθήτε τη γενική (ανεξάρτητη από τη συγκεκριμένη άσκηση) "συνταγή": Ένα διάνυσμα $w \in \mathbb{R}^m$ ανήκει στον χώρο που παράγουν κάποια διανύσματα $u_1, \ldots, u_n$ του $\mathbb{R}^m$ αν και μόνο αν οι πίνακες $\left(u_1 \mid u_2 \mid \ldots \mid u_n \right)$ και $\left(u_1 \mid u_2 \mid \ldots \mid u_n \mid w \right)$ έχουν την ίδια τάξη (rank).

2. (α΄) Έστω ότι U, W είναι υπόχωροι του διανυσματικού χώρου V και S, T υποσύνολα του V, τέτοια ώστε $U = \langle S \rangle$ και $W = \langle T \rangle$. Αποδείξτε ότι $U + W = \langle S \cup T \rangle$.

   (β΄) Θεωρήστε τα διανύσματα του $\mathbb{R}^4$: $u_1 = (1, 1, 2, 3)$, $u_2 = (1, 0, 1, 1)$, $u_3 = (-1, 2, 1, 3)$, $w_1 = (1, 2, 3, 5)$, $w_2 = (1, 0, 1, 2)$ και τους υποχώρους $U = \langle u_1, u_2, u_3, W = \langle w_1, w_2 \rangle$. Βρείτε μια βάση του υποχώρου $U + W$.

   Υπόδειξη. Χρησιμοποιείστε το (α΄).

3. (α΄) Έστω διανυσματικός χώρος V και οι υπόχωροί του $U = \langle u_1, \ldots, u_m \rangle$, $W = \langle w_1, \ldots, w_n \rangle$. Δείξτε ότι, αν το σύνολο $\{u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, τότε $U \cap W = \langle \bar{0} \rangle$.

   (β΄) Στον $\mathbb{R}^4$ θεωρείστε τα διανύσματα $u_1 = (1, 2, 3, 4)$, $u_2 = (2, -1, 0, 1)$, $w_1 = (1, 0, 3, 6)$, $w_2 = (1, 0, 1, 3)$. Αν $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ και $W = \langle w_1, w_2 \rangle$, δείξτε ότι $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

   Υπόδειξη. Χρησιμοποιείστε το (α΄).

4. Στον $\mathbb{R}^5$ θεωρήστε τον υπόχωρο $U = \{(x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{R}^5 : 3x_1 = 2x_2 + x_3,\ x_4 = x_5\}$

   (α′) Βρείτε τη βάση ενός υποχώρου $W \subseteq \mathbb{R}^5$, τέτοιου ώστε $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$.

   (β′) Βρείτε τη βάση ενός υποχώρου $V \subseteq \mathbb{R}^5$, τέτοιου ώστε ο V περιέχει το διάνυσμα $(0, 1, -2, 1, 1)$ και $\mathbb{R}^5 = U + V$.

5. Στον $\mathbb{R}^4$ θεωρείστε τα διανύσματα $u_1 = (1, 2, 3, 4)$, $u_2 = (2, -1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 1, 1, -1)$, $w_1 = (1, 0, 3, 6)$, $w_2 = (0, 0, 2, 3)$. Έστω $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ και $W = \langle w_1, w_2 \rangle$.

   (α′) Υπολογίστε μια βάση του υποχώρου $U \cap W$.

   (β′) Αποδείξτε ότι $\dim(U + W) = 4$. Μετά εξηγήστε γιατί $\mathbb{R}^4 = U + W$, αλλά $\mathbb{R}^4 \neq U \oplus W$.

   Γενική "συνταγή": Έστω ότι $u_1, \ldots, u_l$, $w_1, \ldots, w_m$ είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ (δείτε τα σαν στήλες) και $U = \langle u_1, \ldots, u_l \rangle$, $W = \langle w_1, \ldots, w_m \rangle$. Παρατηρήστε ότι τα διανύσματα του $U \cap W$ είναι αυτά της μορφής $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_l u_l$ για τα οποία υπάρχουν $\mu_1, \ldots, \mu_m$ έτσι ώστε $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_l u_l = \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_m w_m$. Αυτό σας οδηγεί σ' ένα ομογενές σύστημα με αγνώστους $\lambda_1, \ldots, \lambda_l, \mu_1, \ldots, \mu_m$. Κάθε λύση $(\lambda_1, \ldots, \lambda_l, \mu_1, \ldots, \mu_m)$ δίνει και ένα διάνυσμα $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_l u_l$ του $U \cap W$.