Θεωρία Ομάδων

Ασκήσεις

Φυλλάδιο 2ο

Αυτομορφισμοί ομάδων.

(1) Έστω $n \in \mathbb{N}$. Ποιά είναι η ομάδα $Inn(S_n)$;

(2) Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Ποιά είναι η ομάδα $Inn(D_n)$;

(3) Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Ποιά είναι η ομάδα $Inn(A_n)$;

(4) Θεωρούμε την ομάδα $(\mathbb{Z}, +)$. Ποιές από τις παρακάτω απεικονίσεις είναι αυτομορφισμός αυτής;

(a) $\varphi_1 : \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ m \mapsto m+1 \end{cases}$, (b) $\varphi_2 : \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ m \mapsto 2m \end{cases}$ (c) $\varphi_3 : \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ m \mapsto -m \end{cases}$

(5) Έστω G ομάδα. Να αποδείξετε ότι η $\varphi : \begin{cases} G \to G \\ a \mapsto a^{-1} \end{cases}$ είναι αυτομορφισμός της $G \iff$ όταν η G είναι αβελιανή.

(7) Έστω G πεπερασμένη ομάδα. Αν η ομάδα $Aut(G)$ έχει ένα στοιχείο α τάξης 2 τ.ω. [Αν $\alpha(g) = g \Rightarrow g = 1_G$], τότε να αποδείξετε ότι η G είναι αβελιανή περιττής τάξης.

(Η άσκηση 7 θα γίνει μετά την επόμενη.!)

Θεωρία ομάδων

Ασκήσεις Φυλλάδιο 12

(6) Έστω G πεπερασμένη ομάδα και $\alpha \in Aut(G)$ τ.ω. $[$Αν $\alpha(g)=g \Rightarrow g=1_G]$, τότε

$$G=\{ g^{-1}\cdot(\alpha(g)) \mid g\in G\}$$

(8) Να αποδείξετε ότι $Aut(S_3)\cong S_3$

(9) Αν V η τετραδική ομάδα του Klein, να αποδείξετε ότι $Aut(V)\cong S_3$

(10) Ποιά είναι η ομάδα $Aut(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4)$;