Ασκήσεις

Φυλλάδιο 8°

(Επαναληπτικό)

(1) Έστω $m \geq 4$, ένας άρτιος ακέραιος και $a \in \mathbb{Z}$, $a \geq 2$.
Να αποδείξετε ότι ο $\frac{m^a}{2} + \frac{m}{2} - 1$, είναι σύνθετος.
<u>Εφαρμογή</u>: Να αποδείξετε ότι ο

$$2^{2^6} + 15,$$ είναι σύνθετος.

(2) Αν n θετικός ακέραιος, με $n \equiv 2 (3)$ τότε να αποδείξετε ότι κάθε <u>περιττός</u> διαιρέτης του n^2+n+1 είναι ισότιμος προς τον $\equiv 1 (3)$.

(3) Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n το κλάσμα $\frac{21n+4}{14n+3}$ είναι ανάγωγο.

(4) Να αποδείξετε ότι η διοφαντική εξίσωση $X^3 + 5 = 117Y^3$ <u>δεν</u> έχει ακέραια λύση.

(5) Αν $S_n := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, $n \geq 2$ να αποδείξετε ότι $S_n \notin \mathbb{Z}$ $(\forall n \geq 2)$.

⑥ Αν $A = \{F_{2n}, F_{2n+2}, F_{2n+4}, 4F_{2n+1}F_{2n+2}F_{2n+3}\}$ να αποδείξετε ότι για $x, y \in A$ με $x \neq y$ ο $xy+1$ είναι τέλειο τετράγωνο.

⑦ Να βρείτε όλες τις πρωταρχικές λύσεις της διοφαντικής εξίσωσης:

$$X^2 + 3Y^2 = Z^2.$$

⑧ Να αποδείξετε ότι

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n, \cancel{a_{n-1}, \ldots, a_1}] \quad (n \geq 1)$$

$[a_n, \ldots, a_1, a_0]$

και ότι

$$p_n q_{n-3} - q_n p_{n-3} = (-1)^{n-1}(a_n a_{n-1} + 1)$$

⑨ Αν $ax^2 - bx + c = 0$, με $abc \neq 0$ και $b^2 - 4ac \neq \square$, να αποδείξετε ότι το συνεχές κλάσμα $\left[\overline{\frac{b}{a}, \frac{b}{c}}\right]$ είναι μία πραγματική ρίζα της εξίσωσης αυτής.

⑩ Να προσπαθήσετε να αποδείξετε, βήμα-βήμα την αριθμητική του ($K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, $R_K = \mathbb{Z}[\cancel{\sqrt{-3}}]$), σε αναλογία αυτής του ($K = \mathbb{Q}(i)$, $R_K = \mathbb{Z}[i]$).

$$= \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right]$$