ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις για το εργαστήριο της Πέμπτης 6 Δεκεμβρίου

1. Έστω $z = a + bi, w = c + di \in \mathbb{C}$, όπου $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
   (α΄) Αν θεωρήσετε το $\mathbb{C}$ ως διανυσματικό χώρο πάνω από το $\mathbb{R}$, αποδείξτε ότι τα z, w είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν $ad - bc \neq 0$ και γραμμικώς εξαρτημένα αν $ad - bc = 0$.
   (β΄) Αν θεωρήσετε το $\mathbb{C}$ ως διανυσματικό χώρο πάνω από το $\mathbb{C}$, αποδείξτε ότι τα z, w είναι οπωσδήποτε γραμμικώς εξαρτημένα.

2. Στον K-διανυσματικό χώρο των 2×2 πινάκων με συντελεστές από το K ($K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \ldots$) που τον συμβολίζομε $M_2(K)$, θεωρήστε τους πίνακες
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Αποδείξτε ότι οι A_1, A_2, A_3, A_4 είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι και $M_2(K) = \langle A_1, A_2, A_3, A_4 \rangle$.

3. Παίρνοντας την ιδέα από την προηγούμενη άσκηση, βρείτε ένα σύνολο 9 γραμμικώς ανεξαρτήτων πινάκων 3×3, οι οποίοι παράγουν τον διανυσματικό χώρο $M_3(K)$ των 3×3 πινάκων. Μετά γενικεύστε το συμπέρασμά σας στον διανυσματικό χώρο $M_n(K)$ των $n \times n$ πινάκων.

4. Στον δ.χ. $C^0(\mathbb{R})$ θεωρούμε τα “διανύσματα” (συναρτήσεις) f, g που ορίζονται από τους τύπους $f(x) = 3\cos 2x$, $g(x) = 2\cos^2 x$ και τη σταθερή συνάρτηση h με $h(x) = 2\ \forall x \in \mathbb{R}$.
   (α΄) Στο προηγούμενο φυλλάδιο υπήρχε η άσκηση που ζητούσε να δείξετε ότι οι f, g είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Αν δεν έχετε κάνει την άσκηση, να την κάνετε τώρα.
   (β΄) Αποδείξτε ότι οι f, g, h είναι γραμμικώς εξαρτημένες.

5. Έστω K-διανυσματικός χώρος V ($K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \ldots$) και $u_1, u_2, u_3 \in V$. Θεωρούμε, επίσης, τα διανύσματα $w_1 = au_1 + bu_2 + cu_3$, $w_2 = a'u_1 + b'u_2 + c'u_3$, $w_3 = a''u_1 + b''u_2 + c''u_3$ και τον πίνακα συντελεστών τους
$$A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix},$$
   (α΄) Αποδείξτε ότι, αν $r(A) < 3$, τότε τα w_1, w_2, w_3 είναι γραμμικώς εξαρτημένο.
   (β΄) Αποδείξτε ότι, αν τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και $r(A) = 3$, τότε τα w_1, w_2, w_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.