ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις για το εργαστήριο της Πέμπτης 29 Νοεμβρίου

Υπενθύμιση των αξιωμάτων του διανυσματικού χώρου V πάνω από ένα σώμα K (ας φαντάζεστε το K ως ένα από τα $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Τα στοιχεία (διανύσματα) του V θα συμβολίζονται με λατινικά γράμματα (συνήθως από τα τελευταία του λατινικού αλφαβήτου), ενώ τα στοιχεία του K θα συμβολίζονται με πεζά γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου.

1. $u + w = w + u \quad \forall\, u, w \in V$.
2. $(u + v) + w = u + (v + w) \quad \forall\, u, v, w \in V$.
3. Υπάρχει στοιχείο $\bar{0} \in V$ τέτοιο ώστε $u + \bar{0} = u \quad \forall u \in V$. Το $\bar{0}$ χαρακτηρίζεται ως *μηδενικό διάνυσμα* του V.
4. Για κάθε $u \in V$ υπάρχει $u' \in V$, τέτοιο ώστε $u + u' = \bar{0}$. Το u' χαρακτηρίζεται ως *αντίθετο διάνυσμα* του u.
5. Για κάθε $\alpha, \beta \in K$ και κάθε $u \in V$ ισχύει $(\alpha\beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$.
6. $1 \cdot u = u \quad \forall u \in V$.
7. $\alpha \cdot (u + w) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot w \quad \forall \alpha \in K, \forall u, w \in V$.
8. $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall u \in V$.

Στις παρακάτω περιπτώσεις σας δίνεται ένα σύνολο V, η πράξη της πρόσθεσης στο V, το σύνολο βαθμωτών K και ο πολλαπλασιασμός βαθμωτού επί διάνυσμα. Δείξτε ότι, σε κάθε περίπτωση, πλήν της τελευταίας, το V με αυτές τις πράξεις είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το K. Στην τελευταία περίπτωση εξηγήστε γιατί το V δεν είναι διανυσματικός χώρος.

1. $K = \mathbb{R}$ και $V = C^0$ το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Εδώ, "διανύσματα" είναι οι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις και η πρόσθεσή τους ορίζεται από τη σχέση $(f+g)(x) = f(x)+g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$, ενώ ο πολλαπλασιασμός βαθμωτού επί διάνυσμα ορίζεται από τη σχέση $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.
2. $K = \mathbb{R}$ και $V = \mathbb{R}$. Εδώ, "διανύσματα" είναι οι πραγματικοί αριθμοί και πρόσθεση διανυσμάτων είναι η συνήθης πρόσθεση των πραγματικών αριθμών. Ο πολλαπλασιασμός βαθμωτού επί διάνυσμα είναι, απλώς, ο πολλαπλασιασμός πραγματικού επί πραγματικό.

3. $K = \mathbb{R}$ και $V = \mathbb{C}$. Εδώ, ‘‘διανύσματα’’ είναι οι μιγαδικοί αριθμοί και πρόσθεση διανυσμάτων είναι η συνήθης πρόσθεση των μιγαδικών αριθμών. Ο πολλαπλασιασμός βαθμωτού επί διάνυσμα είναι, απλώς, ο πολλαπλασιασμός πραγματικού επί μιγαδικό.

4. $K = \mathbb{Q}$ και $V = \mathbb{R}$. Εδώ, ‘‘διανύσματα’’ είναι οι πραγματικοί αριθμοί και πρόσθεση διανυσμάτων είναι η συνήθης πρόσθεση των πραγματικών αριθμών. Ο πολλαπλασιασμός βαθμωτού επί διάνυσμα είναι, απλώς, ο πολλαπλασιασμός ρητού επί πραγματικό.

5. $K = \mathbb{R}$ και $V = \mathbb{R}^\infty$ (συμβολισμός) το σύνολο των ακολουθιών πραγματικών αριθμών. Η πρόσθεση ‘‘διανυσμάτων’’ ορίζεται κατά συντεταγμένες. Δηλαδή, αν $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ και $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$ τότε $\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n, \ldots)$. Ο πολλαπλασιασμός βαθμωτού λ επί διάνυσμα $\bar{a}$ ορίζεται από τη σχέση $\lambda \cdot \bar{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n \ldots)$.

6. $K = \mathbb{R}$ και $V = M_{m,n}(\mathbb{R})$ το σύνολο των $m \times n$ πινάκων πραγματικών αριθμών. Τα ‘‘διανύσματα’’ τώρα είναι οι $m \times n$ πίνακες και η πρόσθεση διανυσμάτων είναι η συνήθης πρόσθεση πινάκων. Ο πολλαπλασιασμός βαθμωτού επί διάνυσμα είναι ο συνήθης: πολλαπλασιάζονται όλα τα στοιχεία του πίνακα με τον αριθμό.

7. $K = \mathbb{R}$ και $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0\}$ το άνω ημιεπίπεδο του $\mathbb{R}^2$. Πρόσθεση διανυσμάτων, καθώς και πολλαπλασιασμός βαθμωτού επί διάνυσμα, είναι τα συνήθη:
$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ και $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.
Σ’ αυτή την περίπτωση πρέπει ν’ αποδείξετε ότι το V δεν είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$.