Θεωρία Ομάδων
Φυλλάδιο 9ο
Κέντρο και μεταθέτες

Ασκήσεις:

(1) Έστω G ομάδα και $\alpha \in G$ με $ord(\alpha) = n$.

(i) Αν n περιττός να αποδείξετε ότι ισχύει: $\alpha^i \neq \alpha^{-i}, \forall i = 1, 2, \ldots, n-1$.

(ii) Αν n άρτιος, έστω $n = 2k$ να αποδείξετε ότι για $1 \leq i < n$ ισχύει: $\alpha^i = \alpha^{-i} \iff i = k$

(2) Αν n περιττός, $n \geq 3$ να αποδείξετε ότι $Z(D_n) = \{1\}$.

(3) Αν n άρτιος, $n = 2k$, να αποδείξετε ότι $Z(D_n) = \{1, \alpha^k\}$

(4) Να αποδείξετε ότι για $n \geq 3$ ισχύει: $Z(S_n) = \{(1)\}$.

(5) Αν $N \trianglelefteq G$ και $N \cap [G,G] = \{1_G\}$, να αποδείξετε ότι $N \leq Z(G)$.

(6) Αν $N \trianglelefteq G$ και $N \cap [G,G] = \{1_G\}$, να αποδείξετε ότι $Z(G/N) = Z(G)/N$.

(7) Να αποδείξετε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \geq 3$ η ομάδα A_n παράγεται από κύκλους μήκους 3.

Θεωρία Ομάδων
Φυλλάδιο 9° (συνέχεια)

(8) Να αποδείξετε ότι $\forall n \geq 2$, ισχύει:

$$[S_n, S_n] = A_n.$$

(9) Να αποδείξετε ότι, $\forall n \geq 5$ ισχύουν:

$$[A_n, A_n] = A_n \quad \text{και} \quad Z(A_n) = \{(1)\}.$$

(10) Ποιο είναι το κέντρο της τετραδικής (Quaternion) ομάδας;