

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις για το εργαστήριο της Πέμπτης 8 Νοεμβρίου

1. Αποδείξτε ότι ουδεμία από τις παρακάτω απεικονίσεις είναι γραμμική.

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x_1, x_2) = (x_1 x_2, x_2, x_1)$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(x) = (x, x^2)$$

$$h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad h(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 2x_2, x_2 + x_3 + 1)$$

2. Υπολογίστε τους πίνακες M_f, M_g των γραμμικών απεικονίσεων $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + 2x_3)$ και $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο $g(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_1)$. (Η άσκηση 4 δικαιολογεί γιατί οι απεικονίσεις αυτές είναι γραμμικές.) Υπολογίστε τον τύπο της σύνθεσης $g \circ f$ καθώς και τον πίνακά της $M_{g \circ f}$. Επαληθεύστε ότι $M_{g \circ f} = M_g \cdot M_f$.

3. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε τους τύπους των απεικονίσεων L_A, L_B . Υπολογίστε τους τύπους των συνθέσεων $L_A \circ L_B$ και $L_B \circ L_A$, καθώς και τους πίνακές τους. Επαληθεύστε ότι ο πίνακας της απεικόνισης $L_A \circ L_B$ ισούται με AB και ο πίνακας της απεικόνισης $L_B \circ L_A$ ισούται με BA .

4. Έστω ότι $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ είναι στήλες $n \times 1$. Δείξτε ότι η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ με τύπο $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\mathbf{a}_1^T \cdot \mathbf{x}, \mathbf{a}_2^T \cdot \mathbf{x}, \dots, \mathbf{a}_m^T \cdot \mathbf{x})$, όπου \mathbf{x} είναι η στήλη με στοιχεία x_1, \dots, x_n , είναι γραμμική. Για τις απεικονίσεις f και g της ασκήσεως 2, ποια είναι τα m, n και ποιες οι στήλες $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$;