

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Υποδείξεις για τις ασκήσεις του 10ου φυλλαδίου ασκήσεων

Υπόδειξη για την 1. Υπάρχει αμέσως μετά την εκφώνηση της ασκήσεως.

Υπόδειξη για την 2. Η διάσταση ενός διανυσματικού (υπο)χώρου ισούται με τον πληθάρημο μιας οποιασδήποτε βάσης του. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, τα m διανύσματα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m$ είναι βάση του \mathbb{R}^m . Εξηγήστε, όμως, γιατί.

Υπόδειξη για την 3. Το υποσύνολο για το οποίο κάνει λόγο η άσκηση μπορεί να περιγραφεί και ως το σύνολο των λύσεων του συστήματος (1 εξίσωση με n αγνώστους!) $x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$, άρα ταυτίζεται με τον μηδενόχωρο του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Ως μηδενόχωρος πίνακα με n στήλες, είναι διανυσματικός υπόχωρος του \mathbb{R}^n . Θυμηθείτε με τί ισούται η διάσταση του μηδενόχωρου ενός πίνακα και βάσει αυτού να συμπεράνετε ότι η ζητούμενη διάσταση είναι $n - 1$

Υπόδειξη για την 4. Ανάλογη με την υπόδειξη της 3. Εδώ ο πίνακας είναι $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Η ζητούμενη διάσταση είναι $n - 1$.

Υπόδειξη για την 5. Ανάλογη με την υπόδειξη της 3. Εδώ ο πίνακας είναι $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Η ζητούμενη διάσταση είναι $n - 2$.

Σύντομη λύση της 6. Χρησιμοποιώντας ξανά και ξανά μια απλή πρόταση που είχαμε κάνει σε αρκετά προηγούμενο μάθημα, έχουμε:

$$\begin{aligned} \langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle &= \langle b_1, b_1 + b_2, b_3, b_4 \rangle = \langle b_1, b_1 + b_2, b_1 + b_2 + b_3, b_4 \rangle \\ &= \langle b_1, b_1 + b_2, b_1 + b_2 + b_3, b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \rangle. \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι το σύνολο C παράγει τον ίδιο υπόχωρο με αυτόν που παράγει το σύνολο \mathcal{B} , δηλαδή, παράγει τον υπόχωρο V . Ο V έχει διάσταση 4, αφού έχει βάση το σύνολο \mathcal{B} , που αποτελείται από 4 διανύσματα. Αφού, λοιπόν, το C έχει πληθάρημο 4 και παράγει τον V , συμπεραίνουμε, βάσει του θεωρήματος 4 β' της 6ης εβδομάδας (ιστοσελίδα), ότι C είναι βάση του V .