

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις για το εργαστήριο της Τρίτης 6 Νοεμβρίου

1. Αν V είναι διανυσματικός υπόχωρος του \mathbb{R}^m , $V = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ και τα u_1, \dots, u_n είναι γραμμικώς εξαρτημένα, δείξτε ότι $n > \dim V$.
2. Αν V είναι διανυσματικός υπόχωρος του \mathbb{R}^m και τα $u_1, \dots, u_n \in V$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και $\langle u_1, \dots, u_n \rangle \subsetneq V$, δείξτε ότι $n < \dim V$.
(Το σύμβολο \subsetneq σημαίνει «γνήσιο υποσύνολο».)

Στις επόμενες ασκήσεις 3, 4 και 5, A είναι $m \times n$ πίνακας. Δείτε τις στήλες του A ως διανύσματα του \mathbb{R}^m ,

3. Αν οι στήλες του A παράγουν τον \mathbb{R}^m , δείξτε ότι $r(A) = m \leq n$. Στην περίπτωση που οι στήλες είναι γραμμικώς εξαρτημένες, δείξτε ότι το $=$ στο \leq δεν μπορεί να ισχύει.
Υπόδειξη. Για το δεύτερο σκέλος χρησιμοποιήστε την άσκηση 1.
4. Αν οι στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, δείξτε ότι $r(A) = n \leq m$. Στην περίπτωση που οι στήλες δεν παράγουν τον \mathbb{R}^m , δείξτε ότι το $=$ στο \leq δεν μπορεί να ισχύει.
Υπόδειξη. Για το δεύτερο σκέλος χρησιμοποιήστε την άσκηση 2.
5. Αν οι στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και παράγουν τον \mathbb{R}^m δείξτε ότι $m = r(A) = n$.
6. Έστω ότι V, W είναι υπόχωροι του \mathbb{R}^m .
(α') Δείξτε ότι το σύνολο $V \cap W$ είναι υπόχωρος του \mathbb{R}^m .
(β') Δείξτε ότι το σύνολο $V + W = \{v + w : v \in V, w \in W\}$ είναι υπόχωρος του \mathbb{R}^m .