ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Δράση Ομάδας σε σύνολο

① Αν $G = S_n$ και V ένας $\mathbb{C}$-δ.χ. με βάση $\{\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n\}$.

Έστω $\pi \in G$, $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 \vartheta_2 + \dots + \lambda_n \vartheta_n \in V$

Ορίζουμε $\pi \cdot v = \lambda_1 \vartheta_{\pi(1)} + \lambda_2 \vartheta_{\pi(2)} + \dots + \lambda_n \vartheta_{\pi(n)}$

Να αποδείξετε ότι ο V είναι ένα G-σύνολο.
Στη συνέχεια να υπολογίσετε την τροχιά και τον σταθεροποιητή του ϑ όταν:

(1) $n=4$ και $v = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4$

(2) $n=4$ και $v = \vartheta_1 + \vartheta_3$

② Έστω $G = SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle/ a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad-bc=1 \right\}$
και $\mathbb{H} = \{ z = x+iy \mid x,y \in \mathbb{R},\ \operatorname{Im} z = y > 0 \}$

Ορίζουμε $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z = \dfrac{az+b}{cz+d}$

Να αποδείξετε ότι η απεικόνιση αυτή είναι $G \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, και ότι είναι <u>δράση</u> της ομάδας G ($\mathbb{H}$ = G-σύνολο).

③ Να υπολογίσετε όλες τις κλάσεις συζυγίας των ομάδων S_4 και A_4

④ Υποθέτουμε ότι μία πεπερασμένη ομάδα έχει δύο κλάσεις συζυγίας. Να αποδείξετε ότι ~~εχ~~ η G έχει <u>ακριβώς</u> 2 στοιχεία.

Ασκήσεις

<u>Θεωρήματα</u> <u>Sylow</u> <u>και</u> <u>Εφαρμογές</u>

1) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο μία ομάδα τάξης 33

2) Να αποδείξετε ότι <u>δεν</u> υπάρχει <u>απλή</u> ομάδα τάξης 30.

3) Κάθε ομάδα τάξης 50 περιέχει μία <u>κανονική</u> υποομάδα τάξης 25

4) Αν η τάξη της G είναι $p.q$, $p, q \in \mathbb{P}$, $\boxed{p<q}$ να αποδείξετε ότι η G <u>δεν</u> είναι απλή. Αν ισχύει επιπλέον ότι $q \neq 1+k.p$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, τότε να αποδείξετε ότι η G είναι <u>κυκλική</u>. Ισχύει το τελευταίο και όταν $q=1+kp$???

5) Αν G μη-αβελιανή ομάδα, τάξης p^3, $p \in \mathbb{P}$, να αποδείξετε ότι $Z(G)=p$.

6) Αν G είναι μία πεπερασμένη p-ομάδα δρά στο πεπερασμένο σύνολο X*, να αποδείξετε

ότι $|X| \equiv |Z(G)| \pmod{p}$.

*δράση είναι η συζυγία.

7) Αν G πεπερασμένη p-ομάδα, να αποδείξετε ότι η G έχει μία <u>κανονική</u> υποομάδα ~~τάξης~~ δείκτου