ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Απαντήσεις ή υποδείξεις για τις ασκήσεις του 8ου φυλλαδίου ασκήσεων

Υπόδειξη στην 1. Πρέπει να δείξομε ότι μοναδική λύση της διανυσματικής εξίσωσης $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (0,0,0,0,0)$, με αγνώστους τους αριθμούς $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, είναι η $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Πράγματι, στο αριστερό μέλος της σχέσης η 3η συντεταγμένη είναι $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 0$. Λόγω του δεξιού μέλους, αυτή πρέπει να ισούται με 0, άρα $\lambda_1 = 0$. Με ανάλογο τρόπο, ελέγχοντας την 4η και την 5η συντεταγμένη, θα πάρετε αντιστοίχως $\lambda_2 = 0$ και $\lambda_3 = 0$.

Υπόδειξη στην 2. Έχομε αποδείξει στη θεωρία ότι n διανύσματα του $\mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, αν και μόνο αν ο $m \times n$ πίνακας A που έχει τα διανύσματα αυτά ως στήλες, έχει τάξη $r(A) < n$ (άρα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνο αν $r(A) = n$). Ειδικά για το S_2 είναι πολύ πιο εύκολο ν' απαντήσομε: Είναι φανερό ότι κανένα από τα δύο διανύσματα του S_2 δεν είναι πολλαπλάσιο του άλλου, άρα, σύμφωνα με τη θεωρία, το S_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο. Για τα υπόλοιπα σύνολα πρέπει να βρείτε ότι τα S_1, S_4 είναι γραμμικώς εξαρτημένα, ενώ το S_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

Περιληπτική λύση της 3. Και για τα δύο ερωτήματα θα χρειαστεί να δούμε τις λύσεις της διανυσματικής εξίσωσης

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m \tag{1}$$

με αγνώστους τους αριθμούς $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Αν αντικαταστήσομε τα w_1, w_2, w_3 με τις εκφράσεις που μας δίνει η άσκηση και κάνομε κατάλληλη αναδιάταξη των όρων, θα πάρομε την ισοδύναμη εξίσωση

$$(\lambda_1 a + \lambda_2 a' + \lambda_3 a'') \cdot u_1 + (\lambda_1 b + \lambda_2 b' + \lambda_3 b'') \cdot u_2 + (\lambda_1 c + \lambda_2 c' + \lambda_3 c'') \cdot u_3 = \mathbf{0}. \tag{2}$$

Για το ερώτημα (α΄): Αν δείξω ότι μπορώ να βρω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ όχι και τα τρία 0, τέτοια ώστε και οι τρείς συντελεστές των u_1, u_2, u_3 στη (2) να είναι 0, τότε αυτά τα $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ θα επαληθεύουν την (1), χωρίς να είναι και τα τρία 0, που σημαίνει ότι τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Μένει να δείξω ότι μπορώ να βρω τέτοια $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Η απαίτηση να μηδενίζουν και τους τρεις συντελεστές στο αριστερό μέλος της (2) ισοδυναμεί με το ότι

$$A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Επειδή εξ υποθέσεως $r(A) < 2$, από θεώρημα έχω ότι για το παραπάνω σύστημα, εκτός από τη μηδενική λύση, υπάρχει και μη μηδενική λύση $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ [1] δηλαδή αυτό είναι που έπρεπε ν' αποδείξω.

Για το ερώτημα (β΄): Τώρα πρέπει να δείξω ότι η (1) έχει μοναδική λύση τη $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Αλλά η (1)) είναι ισοδύναμη με την (2), συνεπώς έχω να δείξω ότι μοναδική λύση της (2)) είναι η $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Πώς το δείχνω αυτό; Εξ υποθέσεως, τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα η (2) μπορεί να ισχύει μόνο αν και οι τρεις συντελεστές στο αριστερό μέλος είναι 0. Αυτή η συνθήκη ισοδυναμεί με τη σχέση (3). Επειδή εξ υποθέσεως $r(A) = 3$, ξέρω από θεώρημα ότι το σύστημα (3) έχει μοναδική λύση τη μηδενική, δηλαδή, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Περιληπτική λύση της 4. Αυτή η άσκηση γενικεύει την άσκηση 1 του 7ου φυλλαδίου. Το ν' ανήκει το w στον υπόχωρο $\langle u_1, \dots, u_n \rangle$ ισοδυναμεί με το να υπάρχουν αριθμοί $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, έτσι ώστε $w = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$. Αν φαντασθούμε όλα τα διανύσματα ως στήλες, η τελευταία σχέση ισοδυναμεί με την εξής σχέση πινάκων:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{array} \right) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = w.$$

Άρα το να μπορεί να γραφτεί το w ως $w = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$ είναι ισοδύναμο με το να έχει το σύστημα $Ax = w$ λύση. (Η λύση του συστήματος μου δίνει τα $\lambda_1, \dots, \lambda_n$). Από θεώρημα, που έχομε χρησιμοποιήσει πολλές φορές, το σύστημα αυτό έχει λύση αν και μόνο αν $r(A|w) = r(A)$.

[1] Στην πραγματικότητα, υπάρχουν άπειρες μη μηδενικές, αλλά αυτό δεν ενδιαφέρει σ' αυτή την άσκηση.