

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις για το εργαστήριο της Τρίτης 30 Οκτωβρίου

- (α') Αποδείξτε ότι, $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^m$ και $n > m$, τότε τα u_1, \dots, u_n είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Μ' άλλα λόγια, οποιαδήποτε διανύσματα του \mathbb{R}^m , που το πλήθος τους είναι $> m$, είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

(β') Αποδείξτε ότι για κάθε διανυσματικό υπόχωρο V του \mathbb{R}^m ισχύει $\dim(V) \leq m$.
- (α') Αποδείξτε ότι, αν τα $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε οποιοδήποτε μη κενό υποσύνολο αυτών είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

(β') Έστω ότι τα $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και $w \in \mathbb{R}^m$, τέτοιο ώστε τα w, u_1, \dots, u_n είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Αποδείξτε ότι $w \in \langle u_1, \dots, u_n \rangle$.

(γ') Αποδείξτε ότι, αν τα $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα τότε οποιοδήποτε σύνολο τα περιέχει είναι γραμμικώς εξαρτημένο.

(δ') Έστω \mathcal{B} βάση ενός διανυσματικού υποχώρου V του \mathbb{R}^m . Τότε, κάθε μη κενό $S \subseteq \mathcal{B}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και κάθε T με $\mathcal{B} \subsetneq T \subset V$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο.
- Έστω ότι $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_l \in \mathbb{R}^m$ και $w_i \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ για κάθε $i = 1, \dots, l$. Δείξτε ότι $\langle u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_l \rangle = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$.
- Έστω ότι τα $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και για κάποιο διάνυσμα $w \in \mathbb{R}^m$ ισχύει ότι $w \notin \langle u_1, \dots, u_n \rangle$. Αποδείξτε ότι τα w, u_1, \dots, u_n είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
- Έστω $V = \langle u_1, \dots, u_k \rangle \subseteq \mathbb{R}^m$ (τα u_1, \dots, u_k δεν είναι κατ' ανάγκη γραμμικώς ανεξάρτητα) και $w \in \mathbb{R}^m$. Έστω $V' = \langle u_1, \dots, u_k, w \rangle$. Αποδείξτε ότι, αν $\dim(V) = \dim(V')$, τότε $w \in V$.