

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις για το εργαστήριο της Πέμπτης 25 Οκτωβρίου

1. Έστω $u_1 = (a_1, a_2, 1, 0, 0)$, $u_2 = (b_1, b_2, 0, 1, 0)$, $u_3 = (c_1, c_2, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^5$, με τα $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ οποιουσδήποτε αριθμούς. Αποδείξτε ότι τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
2. Ποια από τα παρακάτω υποσύνολα S_1, S_2, S_3, S_4 του \mathbb{R}^4 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και ποια γραμμικώς εξαρτημένα;

$$S_1 = \{(1, 2, -1, 3), (1, 2, 0, 2), (2, 4, 1, 4), (1, 2, 1, 1)\}, \quad S_2 = \{(2, 3, 1, -1), (1, 0, 1, 2)\},$$

$$S_3 = \{(1, 1, 0, -1), (2, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1)\}, \quad S_4 = \{(1, 0, 4, 3), (-2, -5, 7, 14), (1, 1, 1, -1)\}.$$

3. Σ' αυτή την άσκηση θεωρούμε ένα πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix},$$

διανύσματα $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^m$ και τα $w_1 = au_1 + bu_2 + cu_3$, $w_2 = a'u_1 + b'u_2 + c'u_3$, $w_3 = a''u_1 + b''u_2 + c''u_3$.

(α') Αποδείξτε ότι, αν $r(A) < 3$, τότε τα w_1, w_2, w_3 είναι γραμμικώς εξαρτημένο.

(β') Αποδείξτε ότι, αν τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και $r(A) = 3$, τότε τα w_1, w_2, w_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

4. Σ' αυτή την άσκηση να θεωρήσετε τα διανύσματα σαν στήλες $m \times 1$.

Έστω ότι $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^m$. Αποδείξτε ότι ένα διάνυσμα $w \in \mathbb{R}^m$ ανήκει στον υπόχωρο $\langle u_1, \dots, u_n \rangle$ αν και μόνο αν $r(A|w) = r(A)$, όπου A είναι ο πίνακας με στήλες τα u_1, \dots, u_n .