Ασκήσεις
Φυλλάδιο 4°
(Αριθμοί Fibonacci)

1. Αν $2 \mid F_n$, να αποδείξετε ότι $4 \mid (F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2)$

και αν $3 \mid F_n$, τότε $9 \mid (F_{n+1}^3 - F_{n-1}^3)$.

2. Για κάθε $n \geq 3$ ισχύει:

$$F_{n+1}^2 = F_n^2 + 3F_{n-1}^2 + 2(F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_{n-2}^2)$$

3. Αν $m \geq 1, n \geq 1$ και ΜΚΔ $(m,n) = 1$, τότε

$$F_m F_n \mid F_{mn}.$$

4. Για κάθε $n \geq 1$ ισχύει:

$$2^{n-1} F_n \equiv n \pmod 5$$

5. Να αποδείξετε ότι

$$F_{2n+2} F_{2n-1} - F_{2n} \cdot F_{2n+1} = 1, \ \forall n \geq 1$$

6. Να αποδείξετε ότι:

i) $F_{n+1}^2 - 4F_n F_{n-1} = F_{n-2}^2, \quad \forall n \geq 3$

ii) $F_{n+1} F_{n-1} - F_{n+2} F_{n-2} = 2(-1)^n, \quad \forall n \geq 3$

(iii) $F_n^2 - F_{n+2}F_{n-2} = \cancel{2}(-1)^n$, $\forall n \geq 3$

(iv) $F_n^2 - F_{n+3}F_{n-3} = 4(-1)^{n+1}$, $\forall n \geq 4$

(v) $F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2$, $\forall n \geq 2$

(7) Αν $p \in \mathbb{P}$, $p = 4k+3$, τότε η

$a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{p}$, συνεπάγεται ότι $p | a$ και $p | b$

(Αποδείξτε το ή δεχτείτε το!)

Να αποδείξετε ότι:

Αν $p \in \mathbb{P}$, $p \equiv 3 (4)$, τότε $\forall n \geq 1$ ισχύει:

$$p \nmid F_{2n-1}.$$

~~(8) Να αποδείξετε ότι~~

~~(i) $F_{n+1}^2 - 4F_nF_{n-1} = F_{n-2}^2$, $\forall n \geq 3$~~

~~(ii) $F_{n+1}F_{n-1} - F_{n+2}F_{n-2} = 2(-1)^n$, $\forall n \geq 3$~~

~~(iii) $F_n^2 - F_{n+2}F_{n-2} =$~~

---

(8) Να αποδείξετε ότι το γινόμενο

$F_{2n-1}F_{2n+5}$ γράφεται σαν

άθροισμα δύο τετραγώνων.

(9) Θ' εύρεσετε κατάλληλη υπακολουθία της ακολουθίας Fibonacci και αποδείξτε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής $4k+1$.

(10) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(F_n F_{n+3})^2 + (2F_{n+1} F_{n+2})^2 = (F_{2n+3})^2.$$

Στη συνέχεια να υπολογίσετε 5 πρωταρχικές Πυθαγόρειες τριάδες.
Τέλος, να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$F_n F_{n+1} F_{n+2} F_{n+3}$$

είναι πάντοτε εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου.