

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις για το εργαστήριο της Τρίτης 23 Οκτωβρίου

Πριν προχωρήσετε στις ασκήσεις διαβάστε το παρακάτω σχόλιο!

Σημαντικό σχόλιο. Έστω ότι ένας πίνακας έχει διάσταση $m \times n$, οπότε οι γραμμές του θεωρούνται ως διανύσματα του \mathbb{R}^n , ενώ οι στήλες του ως διανύσματα του \mathbb{R}^m . Όταν εξετάζουμε ανά ένα διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^n$ ανήκει (ή δεν ανήκει) στον χώρο γραμμών του A (αυτόν που συμβολίζουμε $\mathcal{R}(A^T)$), ή στον μηδενόχωρο του A (αυτόν που συμβολίζουμε $\mathcal{N}(A)$) τότε βλέπουμε το u σαν γραμμή με n στοιχεία (πίνακα $1 \times n$) και όταν εξετάζουμε ανά ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^m$ ανήκει (ή δεν ανήκει) στον χώρο στηλών του A (αυτόν που συμβολίζουμε $\mathcal{R}(A)$), τότε βλέπουμε το v σαν στήλη με m στοιχεία (πίνακα $m \times 1$).

1. Δίδονται τα διανύσματα $u_1 = (1, 2, 3, 4)$, $u_2 = (-1, 0, 1, 0)$, $u_3 = (0, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$. Ποια από τα διανύσματα $w_1 = (5, 4, 3, 12)$, $w_2 = (1, 1, 1, 1)$, $w_3 = (1, 5, 1, 2)$ ανήκουν στον υπόχωρο $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$;
2. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Για καθένα από τα παρακάτω διανύσματα εξετάστε σε ποιον από τους χώρους $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{R}(A^T)$ ανήκει (μπορεί να μην ανήκει σε κανένα):

$$w_1 = (2, -1, 4), \quad w_2 = (4, -2, -3, -17), \quad w_3 = (0, 0, 0, 0), \quad w_4 = (10, -4, -6), \quad w_5 = (1, 1, 1, 1).$$

3. Έστω Z ο μηδενικός 3×4 πίνακας. Περιγράψτε τους χώρους $\mathcal{N}(Z)$, $\mathcal{R}(Z^T)$ και $\mathcal{R}(Z)$.

4. Για τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ υπολογίστε δύο διανύσματα που παράγουν τον υπόχωρο $\mathcal{R}(A^T)$ και δύο διανύσματα που παράγουν τον υπόχωρο $\mathcal{R}(A)$.

5. Στον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ δείξτε ότι ισχύει $\mathcal{R}(A^T) = \mathbb{R}^3 = \mathcal{R}(A)$.