

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις για το εργαστήριο της Τρίτης 16 Οκτωβρίου

1. (α') Να βρεθεί η γενική λύση του μη ομογενούς συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ με

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(β') Για το ίδιο A και οποιαδήποτε στήλη \mathbf{b} δείξτε ότι το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει λύση.

2. Να βρεθεί η γενική λύση του μη ομογενούς συστήματος, του οποίου ο πίνακας είναι

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 13 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -19 & -3 & -1 \\ -3 & 57 & 9 & 3 \end{array} \right).$$

3. Να λυθεί καθένα από τα δύο μη ομογενή συστήματα με αντίστοιχους πίνακες

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right) \text{ και } \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right).$$

Σχόλιο. Στην πραγματικότητα, εδώ πρόκειται για συστήματα, που το καθένα αποτελείται από μία μόνο εξίσωση με 4 αγνώστους. Αυτό δεν πρέπει να σας μπερδέψει! Τα λύνετε κανονικά, όπως τα συστήματα με περισσότερες εξισώσεις.

4. Έστω ότι για κάποιο συγκεκριμένο, αλλά άγνωστο σ' εσάς, μη ομογενές σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ τριών εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους σας δίνουν τις εξής πληροφορίες:

(α') Η τετράδα $(1, -1, 2, 3)$ είναι λύση του συστήματος. (β') Το αντίστοιχο ομογενές σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει ακριβώς δύο βασικές λύσεις, τις $(0, 2, 1, 1)$ και $(-1, 0, 0, 1)$. Εξετάστε αν κάθε μία από τις τετράδες $(0, 2, 0, -1)$ και $(6, 5, 5, 1)$ είναι λύση του συστήματος.

5. Έστω το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ με

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \kappa & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 3 \end{pmatrix},$$

όπου κ, λ είναι αριθμοί, που μπορούν να πάρουν διάφορες τιμές (άρα, για κάθε διαφορετικό ζευγάρι (κ, λ) παίρνουμε διαφορετικό σύστημα).

(α') Για ποιες τιμές των κ, λ το σύστημα είναι αδύνατο;

(β') Για ποιες τιμές των κ, λ το σύστημα έχει ακριβώς μία λύση;

(γ') Για ποιες τιμές των κ, λ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις;