# ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ
## για την Εκπαίδευση
## Φυλλάδιο 4ο
### <u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1) Να αποδείξετε ότι $4147 \mid 12^{512} - 1$

2) Αν $m, n \in \mathbb{N}$ και $p \in \mathbb{P}$, να αποδείξετε ότι ο ακέραιος $\alpha := m^p - n^p$ είναι πρώτος προς τον $p$ ή αλλιώς $p^2 \mid \alpha$

3) Να λυθεί η ισοτιμία $1193x \equiv 367 \bmod 31500$

4) Ποιός είναι ο πιό μικρός τριψήφιος αριθμός $n$ τ.ω. $2 \mid n$, $3 \mid n+1$, $4 \mid n+2$, $5 \mid n+3$ και $6 \mid n+4$;

5) Να αποδειχθεί ότι η ισοτιμία
$$6x^2 + 5x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$
έχει λύση για κάθε $p \in \mathbb{P}$

6) Αν $\alpha, b \in \mathbb{N}$ και $p \in \mathbb{P}$ τ.ω. $(\alpha, p) = (b, p) = 1$ να αποδείξετε ότι οι ισοτιμίες $x^2 \equiv \alpha \pmod{p}$, $x^2 \equiv b \pmod{p}$, $x^2 \equiv \alpha \cdot b \pmod{p}$ έχουν και οι τρείς λύση ή ακριβώς μία από αυτές

7) Να αποδείξετε ότι η $x^2 + 2 \equiv 0 \pmod{p}$, $p \in \mathbb{P}, p \neq 2$ έχει λύση $\Longleftrightarrow$ $p = 8m+1$ ή $8m+3 \mid m \in \mathbb{Z}$

8) Να αποδείξετε ότι η $x^2 + 3 \equiv 0 \pmod{p}$ $p > 3$ έχει λύση $\Leftrightarrow$ $p = 6m+1 \mid m \in \mathbb{Z}$