Φυλλάδιο 4ο

1) Έστω G πεπερ. ομάδα τάξης n και $\varphi: G \to \mathbb{Z}_{15}$ ομομορφισμός ομάδων. Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιές λάθος;

(1) Το $15|n$ (2) Το $n|15$

(3) Αν φ μονομορφισμός, τότε $15|n$

(4) Αν φ επιμορφισμός, τότε $15|n$

(5) Αν φ μονομορφισμός, τότε $n|15$

(6) Αν φ επιμορφισμός τότε $n|15$

(7) Αν $n=15$, τότε φ ισομορφισμός

2) Αν G ομάδα και $x \in G$ να αποδείξετε ότι $C_G(x) = \{g \in G \mid xg = gx\} \leq G$

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

$$Z(G) = \bigcap_{g \in G} C_G(g)$$

3) Να αποδείξετε ότι $\frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{\langle (1,1) \rangle} \cong \mathbb{Z}$

4) Αν G ομάδα, $H \trianglelefteq G$, $[G:H] < \infty$, $N \leq G$, $|N| < \infty$ και $\text{ΜΚΔ}([G:H], |N|) = 1$, να αποδείξετε ότι $N \leq H$

(5) Αν G ομάδα και $H \trianglelefteq G$, $N \leq G$ με $|H| < \infty$ και $[G:N] < \infty$ και $\text{ΜΚΔ}([G:N], |H|) = 1$, να αποδείξετε ότι $H \leq N$.