

Θεωρία ομάδων

Ασκήσεις Φυλλάδιο 3°

- 1) Να υπολογιστούν τα αριστερά
κόμνημα της G ως προς την H όταν:
(i) $G = \mathbb{Z}$ και $H = 5\mathbb{Z}$ (ii) $G = 5\mathbb{Z}$ και $H = 15\mathbb{Z}$
- 2) Αν G ομάδα και $H_1 \leq G$, $H_2 \leq G$ με $|H_1| = m$
 $|H_2| = n$. Αν $\text{MKD}(m, n) = 1$, να αποδείξετε
ότι $H_1 \cap H_2 = \{1_G\}$.
- 3) Αν G ομάδα και $a, b \in G$ τ.ω. $a^6 = b^8 = 1$,
να αποδείξετε ότι $b = 1_G$ και $a = 1_G$ ή
 $\text{ord}(a) = 3$.
- 4) Αν G ομάδα και $H \leq G$ με δείκτη $[G:H] = n$
τότε να αποδείξετε ότι για κάθε $g \in G$
υπάρχει σκέρος $m = m(g)$, $1 \leq m \leq n$ τ.ω.
 $g^m \in H$.
- 5) Αν μία ομάδα G δεν έχει γήγριες
υποομάδες να αποδείξετε ότι κατ'αίολογμ
είναι πεπερασμένη τάξης πρώτου αριθμού.
- 6) Αν G πεπερασμένη ομάδα και $H \leq G$
μοναδική υποομάδα της G τάξης m ,
τότε $H \trianglelefteq G$.

Φυλλάδιο 3^ο (Βυνέχεια)

7. Είναι οι ομάδες D_4 και $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ ισομορφικές;
8. Αν G, H ομάδες, να αποδείξετε
ότι $Z(G \times H) = Z(G) \times Z(H)$
Αν $K \leq G \times H$, να αποδείξετε ότι
 $K = G_1 \times H_1$, όπου $G_1 \leq G$ και $H_1 \leq H$,
ή, αν δεν ισχύει να δώσετε ένα αντεπαράδειγμα.
9. Να κοιτάτε βκευασάτε έναν μη-τετραπλένο
ομομορφισμό ομάδων, αν υπάρχει.
Αλλιώς να δικαιολογήσετε γιατί δεν
υπάρχει: (i) $\varphi: D_4 \rightarrow S_5$
(ii) $\varphi: S_3 \rightarrow \mathbb{Z}_3$
(iii) $\varphi: \mathbb{Z}_{10} \rightarrow \mathbb{Z}_8$
10. Έστω $G = GL_2(\mathbb{R})$ και $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a \neq 0 \right\}$
Να αποδείξετε ότι $H \leq G$.
Στη βυνέχεια, έστω $K = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a = c = 1 \right\}$.
Να αποδείξετε ότι $K \leq H$.
Τέλος, να υπολογίσετε την ομάδα
πηλίκων H/K .

Ιωάννης Α. Αρζεμαΐδης
Ηράκλειο, 4-10-2018