

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Σε τούτο το φυλλάδιο, όπως και σε όλα τα μαθήματα από εδώ και εξής, θα χρησιμοποιούμε τους εξής συμβολισμούς: Έστω θετικός ακέραιος n και (όπως πάντα) I_n είναι ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας. Έστω $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, με $i \neq j$. Τότε:

- Συμβολίζουμε P_{ij} τον πίνακα που προκύπτει από τον I_n αν εναλλάξουμε την i -γραμμή με την j -γραμμή.
- Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, συμβολίζουμε $E_{ij}(\lambda)$ τον πίνακα που προκύπτει από τον I_n αν στην i -γραμμή προσθέσουμε λ φορές την j -γραμμή.

Ασκήσεις για το εργαστήριο της 4 Οκτωβρίου

1. Έστω ότι A, B, C είναι 3×3 πίνακες και

$$(A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (B^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (C^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε τον πίνακα $(A^{-1}(BC)^{-1})^T$.

Απάντηση: $\begin{pmatrix} 66 & -6 & 20 \\ 4 & -2 & 2 \\ 17 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

2. (α') Αν $n = 4$, υπολογίστε τους πίνακες $P_{24}, E_{24}(5), P_{42}, E_{42}(5)$.
(β') Αν $n = 4$ και λ οποιοσδήποτε αριθμός, υπολογίστε τους πίνακες $E_{42}(\lambda) \cdot E_{42}(-\lambda), E_{13}(\lambda) \cdot E_{13}(-\lambda)$. Τί παρατηρείτε;
(γ') Για γενικό $n > 1$ και λ οποιονδήποτε αριθμό, μπορείτε να μαντέψετε, βάσει του ερωτήματος (β'), ποιος είναι ο πίνακας $E_{ij}(\lambda) \cdot E_{ij}(-\lambda)$, για οποιαδήποτε $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, με $i \neq j$;
(δ') Για γενικό $n > 1$ και $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, με $i \neq j$, αποδείξτε ότι $P_{ij}^T = P_{ij}$.

3. Έστω $n = 3$ και $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$.

- (α') Υπολογίστε τους πίνακες $P_{13}A, P_{23}A, AP_{13}, AP_{23}$. Τί παρατηρείτε; Δηλαδή, ποια σχέση έχουν αυτοί οι πίνακες με τον A ; Μπορείτε να μαντέψετε ένα γενικό κανόνα για τη σχέση ενός πίνακα A με τους $P_{ij}A$ και AP_{ij} ;
(β') Έστω λ οποιοσδήποτε αριθμός. Υπολογίστε τους πίνακες $E_{31}(\lambda)A$ και $E_{32}(\lambda)A$. Τί παρατηρείτε; Δηλαδή, ποια σχέση έχουν αυτοί οι πίνακες με τον A ; Μπορείτε να μαντέψετε ένα γενικό κανόνα για τη σχέση ενός πίνακα A με τον $E_{ij}(\lambda)A$;