Θεωρία Ομάδων
Ασκήσεις
φυλλάδιο 2°

1) Έστω $(G,\cdot)$ ομάδα και $H\leq G, K\leq G$. Να αποδείξετε ότι $(H\cup K \leq G) \iff [H\leq K$ είτε $K\leq H]$

2) Αν $(G,\cdot)$ αβελιανή ομάδα, να αποδείξετε ότι το $G_t := \{a\in G \mid ord(a)<\infty\} \leq G$

3) Αν $(G,\cdot)$ ομάδα και $a\in G$, να αποδειχθεί ότι το σύνολο $C(a)=\{x\in G \mid xa = ax\} \leq G$

4) Να αποδείξετε ότι η ομάδα $(\mathbb{Z}_7^*,\cdot)$ είναι ισόμορφη προς την $(\mathbb{Z}_6,+)$

5) Να αποδείξετε ότι η ομάδα $(\mathbb{Z}_8^*,\cdot)$ είναι ισόμορφη προς την $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,+)$

6) Να βρείτε όλους τους ομομορφισμούς από την $\mathbb{Z}_{12}$ στην $\mathbb{Z}_6$ και από την $\mathbb{Z}$ στην $\mathbb{Z}_6$

Θεωρία ομάδων

Ασκήσεις, φυλλάδιο 2° (συνέχεια)

(7) Ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ομομορφισμοί ομάδων; Αν είναι ομομορφισμός, να υπολογίσετε τον πυρήνα αυτού.

(a) $\varphi : (\mathbb{R}^*, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $\varphi(a) = a + ia$

(b) $\varphi : (M_2(\mathbb{R}), +) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$ $\varphi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d$

(c) $\varphi : (\mathbb{C}^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $\varphi(a + bi) = a^2 + b^2$

(d) $\varphi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow GL_2(\mathbb{R})$, $\varphi(a) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$

(8) Αν G_1, G_2, G_3 ομάδες και $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$, $\psi : G_2 \rightarrow G_3$ ομομορφισμοί ομάδων να αποδείξετε ότι $\ker(\varphi) \subseteq \ker(\psi \circ \varphi)$

(9) Έστω G ομάδα. Να αποδείξετε ότι η G είναι αβελιανή $\Leftrightarrow$ $\varphi(g) = g^{-1}$ είναι ενδομορφισμός της G

(10) Να αποδείξετε ότι

(i) $Aut(\mathbb{Z}, +) \cong (\mathbb{Z}_2, +)$ και

(ii) $Aut(\mathbb{Z}_n, +) \cong (\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$ $| n \geq 1$