ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις για το εργαστήριο της Τρίτης 2 Οκτωβρίου

1. Αποδείξτε ότι το σύστημα

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 1 \\ 2x + y + z &= 0 \\ -x + 13y - 32z &= a \end{aligned}$$

είναι αδύνατο για κάθε $a \neq 9$. Για $a = 9$ δείξτε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, κάθε μία από τις οποίες εκφράζεται με τη μορφή $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(x_1, y_1, z_1)$, όπου $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1$ είναι συγκεκριμένοι αριθμοί.

2. Λύστε την προηγούμενη άσκηση κάνοντας κατάλληλες "κινήσεις" στις γραμμές του πίνακα

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 13 & -32 & a \end{array}\right).$$

3. Υπολογίστε τα γινόμενα πινάκων

$$(a\ b\ c) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (a\ b\ c).$$

4. Αν

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

υπολογίστε τον πίνακα $-(AB)$.

5. Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, υπολογίστε τους πίνακες $A^2 (= A \cdot A)$, $A^3 (= A^2 \cdot A)$, $A^4 (= A^3 \cdot A)$. Μπορείτε να βγάλετε ένα κανόνα για τον A^n για κάθε θετικό ακέραιο n;

6. Αν $N = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 15 & -9 & 6 \\ 10 & -6 & 4 \end{pmatrix}$, υπολογίστε τον $N^2 (= N \cdot N)$. Το αποτέλεσμα είναι μη αναμενόμενο!

7. Για τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ σας δίδεται η πληροφορία ότι $A \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ για κάθε επιλογή των b_1, b_2, b_3. Αποδείξτε ότι, τότε, όλα τα a_{ij} είναι μηδενικά. Γενίκευση: Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας. Αν $A \cdot B = \mathbf{0}$ για κάθε $n \times 1$ πίνακα (στήλη) B, όπου $\mathbf{0}$ είναι η μηδενική $m \times 1$ στήλη, τότε A είναι ο μηδενικός $m \times n$ πίνακας.

8. Ένας $n \times n$ πίνακας A χαρακτηρίζεται *διαγώνιος*, *άνω τριγωνικός*, *κάτω τριγωνικός*, αντιστοίχως, αν έχει τη μορφή του πρώτου, ή του δεύτερου ή του τρίτου από τους παρακάτω πίνακες, αντιστοίχως:

$$\text{Διαγώνιος} : \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{π.χ.} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\text{Άνω τριγωνικός} : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{π.χ.} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

$$\text{Κάτω τριγωνικός} : \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{π.χ.} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

(Σημείωση: Στους παραπάνω πίνακες δεν αποκλείεται κάποια από τα διαγώνια στοιχεία να είναι 0.)

Αποδείξτε ότι το γινόμενο δύο διαγωνίων πινάκων (αντίστοιχα, άνω τριγωνικών, κάτω τριγωνικών) είναι διαγώνιος (αντίστοιχα, άνω τριγωνικός, κάτω τριγωνικός) πίνακας.

Εξηγήστε γιατί ένας πίνακας που είναι συγχρόνως άνω τριγωνικός και κάτω τριγωνικός, είναι αναγκαστικά διαγώνιος.