

ΑΛΓΕΒΡΑ Ι, ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 3

Πρόβλημα 1. Βρείτε όλες τις λύσεις τού παρακάτω συστήματος ισοτιμιών:

$$x \equiv 1 \pmod{10}, \quad x \equiv 3 \pmod{9}.$$

Πρόβλημα 2. Βρείτε όλες τις λύσεις τού παρακάτω συστήματος ισοτιμιών:

$$7x \equiv 1 \pmod{10}, \quad 5x \equiv 3 \pmod{9}.$$

Πρόβλημα 3. α) Έστω m, n σχετικά πρώτοι θετικοί ακέραιοι και $a \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι οι λύσεις τού συστήματος

$$x \equiv a \pmod{m}, \quad x \equiv a \pmod{n}$$

είναι οι ίδιες με τις λύσεις τής εξίσωσης $x \equiv a \pmod{mn}$. Ισχύει τό ίδιο όταν $(m, n) \neq 1$;
β) Βρείτε όλες τις λύσεις τού παρακάτω συστήματος ισοτιμιών:

$$x \equiv 10 \pmod{4}, \quad x \equiv -7 \pmod{9}.$$

Πρόβλημα 4. Βρείτε όλες τις λύσεις τού παρακάτω συστήματος ισοτιμιών:

$$x \equiv 0 \pmod{2}, \quad x \equiv 1 \pmod{5}, \quad x \equiv 6 \pmod{9}.$$

Πρόβλημα 5. Βρείτε τόν μικρότερο θετικό ακέραιο που ικανοποιεί το σύστημα ισοτιμιών:

$$x \equiv 1 \pmod{5}, \quad x \equiv 3 \pmod{7}, \quad x \equiv 5 \pmod{9}.$$

Πρόβλημα 6. Αν τά μολύβια που περιέχονται σε ένα κουτί τά μοιράσουμε ανά τρία τότε περισσεύει ένα μολύβι στο κουτί, αν τά μοιράσουμε ανά 4 τότε περισσεύουν 3 μολύβια ενώ αν τά μοιράσουμε ανά πέντε τότε δεν περισσεύει κανένα μολύβι. Ποιός είναι ο ελάχιστος αριθμός μολυβιών που μπορεί να περιέχει τό κουτί;

Πρόβλημα 7. Βρείτε όλα τα πολλαπλάσια τού 13 που αφήνουν υπόλοιπο 9 όταν τα διαιρέσουμε με τό 10 και με τό 11.

Πρόβλημα 8. Υπολογίστε τούς αριθμούς Euler $\phi(35)$, $\phi(48)$, $\phi(10000)$.

Πρόβλημα 9. α) Βρείτε το υπόλοιπο τής διαίρεσης τού 7^{1000} διά 24.

β) Βρείτε τό υπόλοιπο τής διαίρεσης τού 641^{108002} διά 63.

γ) Βρείτε το τελευταίο δεκαδικό ψηφίο τών αριθμών 7^{123} και $7^{7^{15}}$.

δ) Υπολογίστε τα δύο τελευταία ψηφία τών αριθμών 9^{2014} και $7^{7^{16}}$.

Πρόβλημα 10. α) Σήμερα είναι Τρίτη. Τι μέρα θα είναι σε 2018^{1972} ημέρες;

β) Ποιά ένδειξη δείχνει ένα 24-ωρο ρολόι, 5^{19} ώρες μετά τις 3:00;

Πρόβλημα 11. α) Βρείτε όλα τα $a \in \mathbb{Z}_{>0}$ με $\phi(a) = 6$.

β) Βρείτε όλα τα $a \in \mathbb{Z}_{>0}$ με $\phi(a) = \text{περιττός}$.

γ) Αν $a \mid b$ δείξτε ότι $\phi(a) \mid \phi(b)$.

Πρόβλημα 12. α) Έστω $a, m, k \in \mathbb{Z}$ με $m, k \geq 1$ και $(a, m) = 1$. Δείξτε ότι $a^{\phi(n^k)} \equiv 1 \pmod{m}$.

β) Έστω $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ με $(m, n) = 1$. Δείξτε ότι $m^{\phi(n)} + n^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{mn}$.