ΑΛΓΕΒΡΑ Ι, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #2

Πρόβλημα 1. α) Δείξτε ότι $10 \mid 101^{2003} - 1$.
β) Δείξτε ότι, αν $a \in \mathbb{N}$ με $(a, 23) = 1$, τότε $23 \mid a^{154} - 1$.
γ) Βρείτε το υπόλοιπο τής διαίρεσης τού 3^{1000} δια τού 7.

Πρόβλημα 2. Δείξτε ότι $7 \mid 111^{333} + 333^{111}$.

Πρόβλημα 3. Δείξτε ότι το αντίστροφο τού [5] στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_{101}$ είναι τό [81]. Ποιό είναι τό υπόλοιπο τής διαίρεσης τού 5^{99} δια τού 101;

Πρόβλημα 4. **α)** Δείξτε ότι αν $a \in \mathbb{N}$ με $(a, 10) = 1$ τότε $a^2 \equiv 1 \mathrm{mod} 10$ ή $a^2 \equiv 9 \mathrm{mod} 10$.
β) Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $4^n \equiv 4 \mathrm{mod} 10$ ή $4^n \equiv 6 \mathrm{mod} 10$.
γ) Αν $a \in \mathbb{Z}$, δείξτε ότι τό τελευταίο δεκαδικό ψηφίο τού a^2 δεν μπορεί να είναι 2.

Πρόβλημα 5. Αποδείξτε ότι, γιά κάθε ακέραιο n, ο αριθμός $n^{37} - n$ είναι πολλαπλάσιο τού 383838. (Υπόδειξη: $383838 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37$).

Πρόβλημα 6. Έστω p πρώτος αριθμός και έστω $[a] \neq [0]$ ένα στοιχείο τού $\mathbb{Z}_p$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει στοιχείο τού $\mathbb{Z}_p$ που να ικανοποιεί την εξίσωση $x^p - x + [a] = [0]$ (δηλ. η εξίσωση δεν έχει λύση στο $\mathbb{Z}_p$).

Πρόβλημα 7. Δείξτε ότι για κάθε πρώτο $p \geq 7$, ο αριθμός 111...1 (με $p - 1$ το πλήθος ψηφία = 1) διαιρείται από τό p. (Υπόδειξη: $11...1 = 1 + 10^1 + 10^2 + \cdots + 10^{p-2} = ...$).

Πρόβλημα 8. Δείξτε ότι για κάθε πρώτο $p \geq 3$ και για κάθε ακέραιο a, ισχύει ότι $a^p \equiv a \,\mathrm{mod} 2p$.

Πρόβλημα 9. Βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις τών παρακάτω διοφαντικών εξισώσεων:
α) $745x + 85y = 30$,
β) $18x - 5y = 10$,
γ) $72y - 56x = 12$,
δ) $141x + 34y = 30$.

Πρόβλημα 10. Βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις τών παρακάτω εξισώσεων με ισοτιμίες. Για κάθε μια από αυτές βρείτε όλες τις μή ισοδύναμες ($\mathrm{mod} m$) λύσεις.
α) $8x \equiv 12 \,\mathrm{mod} 21$,
β) $8x \equiv 12 \,\mathrm{mod} 20$,
γ) $14x \equiv 20 \,\mathrm{mod} 91$,
δ) $14x \equiv 63 \,\mathrm{mod} 91$.

Πρόβλημα 11. α) Δείξτε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο τρόποι να τοποθετήσουμε 51 ίδια αντικείμενα σε κουτιά, έτσι ώστε τό κάθε κουτί να περιέχει 5 ή 6 αντικείμενα.

β) Έχοντας δύο δοχεία τών 4 και 5 κιλών αντιστοίχως, μπορούμε να γεμίσουμε το ένα από αυτά με 3 κιλά νερό;

Πρόβλημα 12. Έστω p περιττός πρώτος. Αποδείξτε ότι τά μόνα στοιχεία τού $\mathbb{Z}_p$, τα οποία έχουν αντίστροφο τόν ευατό τους, είναι τα $[1]$ και $[p-1]$. Βάσει αυτού, αποδείξτε ότι $1 \cdot 2 \cdots (p-1) \equiv (p-1) \mathrm{mod} p$. Κατόπιν, αποδείξτε το *Θεώρημα τού Wilson*: $(p-1)! \equiv -1 \, \mathrm{mod} p$.