

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Ασκήσεις για το εργαστήριο της Πέμπτης 11 Οκτωβρίου

1. Στην άσκηση αυτή όλοι οι πίνακες είναι $n \times n$. Έστω ότι $C_1, C_2, \dots, C_{k-1}, C_k$ είναι αντιστρέψιμοι πίνακες και $C_k C_{k-1} \cdots C_2 C_1 A = B$. Αποδείξτε ότι, αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε και ο B είναι αντιστρέψιμος. Απόδειξτε και το αντίστροφο: Αν ο B είναι αντιστρέψιμος, τότε και ο A είναι αντιστρέψιμος.

Υπόδειξη: Έστω $C_k C_{k-1} \cdots C_2 C_1 = C$. Τί πίνακας είναι ο C ;

2. Αποδείξτε ότι το μη ομογενές σύστημα με πίνακα
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 0 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$
 είναι αδύνατο.

3. Αποδείξτε ότι το μη ομογενές σύστημα με πίνακα
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 0 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$
 έχει λύση και βρείτε τη γενική λύση του.

4. Έστω ότι ο πίνακας U είναι κλιμακωτός ενός 4×4 πίνακα A .

(α') Αν $r(A) = 2$, δείξτε ότι ο U είναι άνω τριγωνικός και τα δύο τελευταία στοιχεία της διαγωνίου του είναι 0.

(β') Αν $r(A) = 3$, δείξτε ότι ο U είναι άνω τριγωνικός και το τελευταίο στοιχείο της διαγωνίου του είναι 0.

(γ') Αν $r(A) = 4$, δείξτε ότι ο U είναι άνω τριγωνικός και όλα τα στοιχεία της διαγωνίου του είναι μη μηδενικά.

Υπόδειξη: Γενικά, αν U είναι κλιμακωτός ενός $n \times n$ πίνακα A και $r(A) = r$, αυτό ισοδυναμεί με το ότι ακριβώς r γραμμές του U (οι πρώτες r γραμμές) είναι μη μηδενικές, άρα οι υπόλοιπες $n - r$ γραμμές είναι μηδενικές.

5. Στηριγμένοι στην προηγούμενη άσκηση, απαντήστε στο εξής: Έστω ότι ο $n \times n$ πίνακας U είναι κλιμακωτός ενός $n \times n$ πίνακα A , με $r(A) = r$. Ποια μορφή έχει ο U αν $r(A) < n$ και ποια αν $r = n$;

6. Έστω A πίνακας $m \times n$, \mathbf{b} στήλη με m στοιχεία και $B = (A|\mathbf{b})$ (πίνακας $m \times (n + 1)$). Αποδείξτε ότι $r(B) = r(A)$ ή $r(B) = r(A) + 1$.