ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

**Απαντήσεις ή υποδείξεις για κάποιες ασκήσεις του εργαστηρίου της Πέμπτης 4 Οκτωβρίου**

**Απάντηση στο 1ο ερώτημα της 1**. $(B^{-1})^T(C^{-1})^T(A^{-1})^T$.

**Απαντήσεις στη 2**. (α′)

$$P_{24} = P_{42} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{24}(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_{42}(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(β′) $E_{42}(\lambda) \cdot E_{42}(-\lambda) = I_4 = E_{13}(\lambda) \cdot E_{13}(-\lambda)$.

(γ′) $E_{ij}(\lambda) \cdot E_{ij}(-\lambda) = I_n$.

(δ′) Υπόδειξη: Αρκεί ν' αποδείξετε ότι ($k$-γραμμή $P_{ij}^T$) = ($k$-γραμμή $P_{ij}$). Θα ξεχωρίσετε περιπτώσεις: $k \neq i, j$, $k = i$, $k = j$ (οι δύο τελευταίες είναι εντελώς ανάλογες). Θα χρησιμοποιήσετε την ιδιότητα που ισχύει σε κάθε πίνακα $A$: ($k$-γραμμή $A^T$) = ($k$-στήλη $A$)$^T$. Θα παρατηρήσετε ότι

$$(k\text{-γραμμή } P_{ij}^T) = \begin{cases} (k\text{-γραμμή } I_n) & \text{αν } k \neq i, j \\ (j\text{-γραμμή } I_n) & \text{αν } k = i \\ (i\text{-γραμμή } I_n) & \text{αν } k = j \end{cases}$$

**Απαντήσεις στην 3**. (α′) $P_{ij}A$ είναι ίσος με τον πίνακα που προκύπτει από τον $A$ αν κάνομε την "κίνηση" ($i$-γραμμή)$\longleftrightarrow$ ($j$-γραμμή), ενώ $AP_{ij}$ είναι ίσος με τον πίνακα που προκύπτει από τον $A$ αν κάνομε την "κίνηση" ($i$-στήλη)$\longleftrightarrow$ ($j$-στήλη).

(β′) Οι υπολογισμοί σας πρέπει να σας οδηγήσουν στο συμπέρασμα (δεν πρόκειται για μαθηματική απόδειξη, αλλά αυτό αρκεί προς το παρόν) ότι $E_{ij}(\lambda)A$ ισούται με τον πίνακα που προκύπτει από τον $A$ αν στην $i$-γραμμή προσθέσομε $\lambda$ φορές τη $j$-γραμμή, ενώ ο πίνακας $AE_{ij}(\lambda)$ ισούται με τον πίνακα που προκύπτει από τον $A$ αν στη $j$-στήλη προσθέσομε $\lambda$ φορές την $i$-στήλη.