ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών &
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Ηράκλειο, 18 Ιουνίου 2019
Θ. Γαρεφαλάκης

ΜΕΜ-222 ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

- Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 30 λεπτά. Φεύγοντας, παραδίνετε τα γραπτά και τα θέματα.
- Δεν επιτρέπεται να έχετε κοντά σας τσάντα ή κινητό τηλέφωνο (έστω και απενεργοποιημένο).
- Συνολικά υπάρχουν 10.5 μονάδες. Η βάση είναι το 5 και το άριστα είναι το 10.

Θέμα 1 (1.5 μον.)

Έστω $n \geq 5$, $H = \langle (1\,2), (3\,4\,5) \rangle \leq \mathbb{S}_n$ και $\mathbb{A}_n$ η υποομάδα των άρτιων μεταθέσεων. Αποδείξτε ότι η ομάδα $H\mathbb{A}_n/\mathbb{A}_n$ είναι κυκλική τάξης 2.

Θέμα 2 (1.5 μον.)

Έστω ομάδα G και στοιχείο $a \in G$ άπειρης τάξης, τέτοιο ώστε $\langle a \rangle \trianglelefteq G$. Αποδείξτε ότι $g^2 a = a g^2$, για κάθε $g \in G$.

Θέμα 3 (2 μον.)

Έστω οι προσθετικές ομάδες $(\mathbb{Z}, +)$ και $(\mathbb{Q}, +)$.

1. Δείξτε ότι δεν υπάρχει γνήσια υποομάδα του $\mathbb{Q}$ με πεπερασμένο δείκτη εντός του $\mathbb{Q}$.
2. Δείξτε ότι δεν υπάρχει γνήσια υποομάδα της $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ με πεπερασμένο δείκτη εντός της $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Θέμα 4 (2 μον.)

1. Υπολογίστε το ελάχιστο πολυώνυμο του $\sqrt{1 + \sqrt[3]{2}}$ πάνω από το $\mathbb{Q}$.
2. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $X^5 - 26X^4 - 13X + 13$ είναι ανάγωγο στο δακτύλιο $\mathbb{Z}[i][X]$.

Θέμα 5 (1.5 μον.)

Για καθένα από τους παρακάτω δακτυλίους, εξετάστε εάν είναι σώμα.

1. $\mathbb{Z}[i]/\langle 5 \rangle$,
2. $\mathbb{Q}[X]/\langle X^2 - 2 \rangle$,
3. $\mathbb{F}_3[X]/\langle X^4 + 2 \rangle$,

Θέμα 6 (2 μον.)

Αποδείξτε τα παρακάτω.

1. Το ιδεώδες $\langle X - 1 \rangle$ του δακτυλίου $\mathbb{Z}[X]$ είναι πρώτο, αλλά όχι μεγιστικό.
2. Ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[X]$ είναι περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης αλλά δεν είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών.