ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2018-19
Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

ΜΕΜ 222 ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 11

Άσκηση 11.1 Έστω K/F επέκταση σωμάτων. Δείξτε ότι $K = F$ αν και μόνο αν $[K : F] = 1$.

Άσκηση 11.2 Έστω σώματα L, F υποσώματα ενός σώματος K και $\alpha \in K$. Δείξτε ότι $F(\alpha) \subseteq L$ αν και μόνο αν $F \subseteq L$ και $\alpha \in L$.

Άσκηση 11.3 Υπολογίστε το βαθμό κάθε μίας από τις παρακάτω επεκτάσεις.

α′. $\mathbb{Q}(\sqrt{10})/\mathbb{Q}$,

β′. $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{12})/\mathbb{Q}$,

γ′. $\mathbb{R}(\sqrt{2})/\mathbb{R}$,

δ′. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$.

Άσκηση 11.4

α′. Δείξτε ότι $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

β′. Δείξτε ότι $\sqrt{2}, \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.
Υπόδειξη: Έστω $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Εφόσον $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$, θα ισχύει $\alpha^3 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Υπολογίστε $c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$, τέτοιους ώστε $c_1\alpha + c_2\alpha^3 = \sqrt{2}$.

γ′. Δείξτε ότι $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

δ′. Υπολογίστε το ελάχιστο πολυώνυμο του $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ πάνω από το $\mathbb{Q}$.
Υπόδειξη: Υπολογίστε το βαθμό της επέκτασης $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ και χρησιμοποιήστε το προηγούμενο ερώτημα.

Άσκηση 11.5

α′. Δείξτε ότι $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$.

β′. Υπολογίστε το ελάχιστο πολυώνυμο του $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ πάνω από το $\mathbb{Q}$.