ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών &
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Ηράκλειο, 4 Απριλίου 2019
Θ. Γαρεφαλάκης

Άλγεβρα ΙΙ – Πρόοδος

Θέμα 1 (10 μ.)

Για $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $f_{a,b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f_{a,b}(x) = ax + b$. Επίσης, ορίζουμε

$$G = \{f_{a,b} \ : \ a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}, \ \text{ και } \ N = \{f_{1,b} \ : \ b \in \mathbb{R}\}.$$

1. Δείξτε ότι η G είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων. Μπορείτε να θεωρήσετε δεδομένο ότι η σύνθεση συναρτήσεων είναι προσεταιριστική πράξη.
2. Δείξτε ότι η N είναι κανονική υποομάδα της G.
3. Δείξτε ότι $G/N \cong \mathbb{R}^*$.

Θέμα 2 (10 μ.)

Έστω ομάδα G και H, K κανονικές υποομάδες της G, τέτοιες ώστε $G = HK$. Ορίζουμε τον ομομορφισμό

$$\phi : G \longrightarrow \frac{G}{H} \times \frac{G}{K}, \quad x \mapsto (xH, xK).$$

1. Δείξτε ότι ο ϕ είναι επιμορφισμός. Δηλαδή, για $a, b \in G$, δείξτε ότι υπάρχει $x \in G$, τέτοιο ώστε $xH = aH$ και $xK = bK$. Θα χρειαστείτε την υπόθεση ότι $G = HK$.
2. Δείξτε ότι
$$\frac{G}{H \cap K} \cong \frac{G}{H} \times \frac{G}{K}.$$

Θέμα 3 (10 μ.)

Θεωρούμε το ιδεώδες $\langle 1 + i \rangle$ του δακτυλίου $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \ : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Για $a, b \in \mathbb{Z}$, δείξτε ότι $a+ib \in \langle 1 + i \rangle$ αν και μόνο αν οι a, b είναι και δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί. Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $2 = (1 + i)(1 - i)$.
2. Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$ τέτοιοι ώστε $a + ib \notin \langle 1 + i \rangle$. Δείξτε ότι $\langle 1 + i, a + ib \rangle = \mathbb{Z}[i]$.