ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2018-19
Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

ΜΕΜ 222 ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 10

Άσκηση 10.1 Δείξτε ότι το πολυώνυμο $(x-1)(x-2)\cdots(x-n)-1$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}[x]$ για κάθε $n \geq 1$. Υπόδειξη: Υποθέστε ότι το πολυώνυμο παραγοντοποιείται ως $g(x)h(x)$ για κάποια μη σταθερά πολυώνυμα $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ (γιατί αρκεί να υποθέσετε ότι τα $g(x), h(x)$ είναι μη σταθερά;) και εξετάστε τις τιμές τους στα $1, \ldots, n$. Τι βαθμό πρέπει να έχουν; Ποιά μορφή πρέπει να έχουν;

Άσκηση 10.2 Εξετάστε για ποιές τιμές του $n \in \mathbb{Z}$ είναι ανάγωγο, στο δακτύλιο $\mathbb{Z}[x]$, το πολυώνυμο $x^3 + nx + 2$.

Άσκηση 10.3 Δείξτε ότι τα παρακάτω πολυώνυμα είναι ανάγωγα στο $\mathbb{Z}[x]$:

α′. $x^6 + 25x^5 - 15x^3 + 10x + 120$

β′. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 2x + 1$

γ′. $x^3 - 4x^2 + 5x + 2$

δ′. $\frac{(x+2)^p - 2^p}{x}$, όπου p είναι περιττός πρώτος.

Άσκηση 10.4 Παραγοντοποιήστε σε ανάγωγους παράγοντες τα πολυώνυμα $x^8 - 1, x^6 - 1 \in \mathbb{Z}[x]$. Μην παραλείψετε να δείξετε ότι οι παράγοντες στους οποίους καταλήξατε είναι ανάγωγοι.

Άσκηση 10.5 Δείξτε ότι το πολυώνυμο $x^4 - 10x^3 + 5$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}[i][x]$.

Άσκηση 10.6 Θέλουμε να δείξουμε ότι το πολυώνυμο $f(x, y) = y^2 - x^3 - x + 1 \in \mathbb{C}[x, y]$ είναι ανάγωγο.

α′. Εξηγήστε γιατί αρκεί να δείξουμε ότι το $f(x, y)$ είναι ανάγωγο στο δακτύλιο $\mathbb{C}(x)[y]$.

β′. Δείξτε ότι εάν το $f(x, y)$ δεν είναι ανάγωγο στο $\mathbb{C}(x)[y]$, τότε $f(x, y) = (y - a(x))(y + a(x))$, για κάποιο $a(x) \in \mathbb{C}[x]$.

γ′. Δείξτε ότι το $f(x, y)$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{C}(x)[y]$.