ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2018-19
Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

ΜΕΜ 222 ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 9

Άσκηση 9.1 Έστω R μία περιοχή κυρίων ιδεωδών. Για ένα στοιχείο $p \in R \setminus \{0\}$, δείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

α′. Το p είναι ανάγωγο

β′. Το $\langle p \rangle$ είναι μεγιστικό ιδεώδες

γ′. Το $\langle p \rangle$ είναι πρώτο ιδεώδες

Άσκηση 9.2 Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Δείξτε ότι υπάρχει ακέραιος x τέτοιος ώστε $|\frac{a}{b} - x| \leq \frac{1}{2}$.
Υπόδειξη: ο ακέραιος x θα είναι είτε ο $\lfloor a/b \rfloor$ ή ο $\lfloor a/b \rfloor + 1$.

Άσκηση 9.3 Δείξτε ότι ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ είναι Ευκλείδια περιοχή.
Υπόδειξη: Εξετάστε την απεικόνιση $\delta : \mathbb{Z}[\sqrt{-2}] \longrightarrow \mathbb{N}$, με $\delta(x + y\sqrt{-2}) = x^2 + 2y^2$.

Άσκηση 9.4 Θέλουμε να δείξουμε ότι ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[i]/\langle 1 + i \rangle$ είναι ισόμορφος με το $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

α′. Εάν $\beta \in \mathbb{Z}[i]$, δείξτε ότι $\beta + \langle 1 + i \rangle = r + \langle 1 + i \rangle$, για $r \in \{0, \pm 1, \pm i\}$.

β′. Δείξτε ότι $1 + \langle 1 + i \rangle = -i + \langle 1 + i \rangle = -1 + \langle 1 + i \rangle = i + \langle 1 + i \rangle$ και $1 + \langle 1 + i \rangle \neq 0 + \langle 1 + i \rangle$.

Άσκηση 9.5 Εάν R είναι μία περιοχή κυρίων ιδεωδών και $a, b \in R$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μέγιστος κοινός διαιρέτης, d, των a, b και μάλιστα υπάρχουν $s, t \in R$ τέτοιοι ώστε $d = sa + tb$.

Άσκηση 9.6 Για καθένα από τα παρακάτω ζεύγη, α, β, στοιχείων του $\mathbb{Z}[i]$ υπολογίσε ένα μέγιστο κοινό διαιρέτη τους και στη συνέχεια γράψτε τον ως $s\alpha + t\beta$, με $s, t \in \mathbb{Z}[i]$.
Υπόδειξη: Ευκλείδιος αλγόριθμος στο δακτύλιο $\mathbb{Z}[i]$.

α′. $-1 + 5i$, $1 + 3i$

β′. $5 + i$, $1 + 8i$

Άσκηση 9.7 Για καθένα από τα παρακάτω ζεύγη, f, g, πολυωνύμων του $\mathbb{Q}[x]$ υπολογίστε το μέγιστο κοινό διαιρέτη τους και στη συνέχεια γράψτε τον ως $sf + tg$, με $s, t \in \mathbb{Q}[x]$.
Υπόδειξη: Ευκλείδιος αλγόριθμος στο δακτύλιο $\mathbb{Q}[x]$.

α′. $x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x + 2x + 1$, $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$

β′. $x^4 + 2x^3 + x^2 + 1$, $x^3 + x + 1$