ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2018-19
Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

ΜΕΜ 222 ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 8

Άσκηση 8.1 Δίνεται το ιδεώδες $\langle 1+i \rangle$ του δακτυλίου $\mathbb{Z}[i] = \{x+iy \ : \ x, y \in \mathbb{Z}\}$.

α′. Δείξτε ότι για $a, b \in \mathbb{Z}$, $a+ib \in \langle 1+i \rangle$ αν και μόνο αν οι a, b είναι και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί.

β′. Αν $a, b \in \mathbb{Z}$ και $a+ib \notin \langle 1+i \rangle$, δείξτε ότι $\langle 1+i, a+ib \rangle = \mathbb{Z}[i]$.

γ′. Δείξτε ότι το ιδεώδες $\langle 1+i \rangle$ είναι μεγιστικό.

Άσκηση 8.2 Δείξτε ότι το $1+i$ είναι πρώτο στοιχείο του δακτυλίου $\mathbb{Z}[i]$.

Άσκηση 8.3 Δίνεται ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}] = \left\{x + y\sqrt{-6} \ : \ x, y \in \mathbb{Z}\right\}$.

α′. Βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία του $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$.

β′. Δείξτε ότι ο $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ δεν είναι περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης.

γ′. Δείξτε ότι το 2 είναι ανάγωγο αλλά όχι πρώτο στοιχείο του δακτυλίου.
Υπόδειξη: Δείξτε ότι $2 | (\sqrt{-6})^2$ αλλά $2 \nmid \sqrt{-6}$.

Άσκηση 8.4 Επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση για το δακτύλιο $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$.

Άσκηση 8.5 Έστω R μία ακέραια περιοχή και $a, b \in R$. Αν το ιδεώδες $\langle a, b \rangle$ του R είναι κύριο, δηλαδή αν υπάρχει στοιχείο $d \in R$ τέτοιο ώστε $\langle a, b \rangle = \langle d \rangle$, δείξτε ότι το d είναι ένας μέγιστος κοινός διαιρέτης των a και b.

Άσκηση 8.6 Η παραπάνω άσκηση δίνει μία ικανή συνθήκη για να έχουν δύο στοιχεία μίας ακέραιας περιοχής μέγιστο κοινό διαιρέτη. Η συνθήκη αυτή όμως δεν είναι και αναγκαία. Θεωρήστε το δακτύλιο $\mathbb{Z}[x]$.

α′. Δείξτε ότι $\langle 2, x \rangle = \{2k + xh(x) \ : \ k \in \mathbb{Z}, h(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$.

β′. Δείξτε ότι το ιδεώδες $\langle 2, x \rangle$ είναι μεγιστικό.

γ′. Δείξτε ότι το $\langle 2, x \rangle$ δεν είναι κύριο.

δ′. Δείξτε ότι το 1 είναι ένας μέγιστος κοινός διαιρέτης των στοιχείων 2 και x.