ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2018-19
Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

ΜΕΜ 222 ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 7

Άσκηση 7.1 Δύο ιδεώδη ενός δακτυλίου R ονομάζονται *σχετικώς πρώτα* εάν $I + J = R$. Αποδείξτε ότι τα ιδεώδη $\langle a\rangle$ και $\langle b\rangle$ του $\mathbb{Z}$ είναι σχετικώς πρώτα αν και μόνο αν $(a, b) = 1$.

Άσκηση 7.2 Έστω R ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και I, J δύο σχετικώς πρώτα ιδεώδη του.

α′. Δείξτε ότι η απεικόνιση
$$\phi : R \longrightarrow \frac{R}{I} \times \frac{R}{J}, \quad r \mapsto (r + I, r + J)$$
είναι επιμορφισμός δακτυλίων.

β′. Δείξτε ότι $IJ = I \cap J$ και $R/IJ \cong R/I \times R/J$.

Άσκηση 7.3 Σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση, η απεικόνιση
$$\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{\langle 5\rangle} \times \frac{\mathbb{Z}}{\langle 7\rangle}, \quad x \mapsto (x + \langle 5\rangle, x + \langle 7\rangle)$$
είναι επιμορφισμός. Υπολογίστε ένα ακέραιο x, τέτοιο ώστε $\phi(x) = (2 + \langle 5\rangle, 3 + \langle 7\rangle)$.
Υπόδειξη: Εφόσον $(5, 7) = 1$, υπάρχουν ακέραιοι s, t τέτοιοι ώστε $5s + 7t = 1$. Υπολογίστε τους και θέστε $x = 2 \cdot 7 \cdot t + 3 \cdot 5 \cdot s$.

Άσκηση 7.4 Σταθεροποιούμε ένα ακέραιο αριθμό a.

α′. Δείξτε ότι η απεικόνιση
$$\mathrm{ev}_a : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad f(x) \mapsto f(a)$$
είναι επιμορφισμός δακτυλίων.

β′. Δείξτε ότι $\mathbb{Z}[x]/\langle x - a\rangle \cong \mathbb{Z}$.
Υπόδειξη: Εάν $f(a) = 0$, τότε $f(x) = (x - a)g(x)$ για κάποιο $g(x) \in \mathbb{Q}[z]$. Δείξτε ότι $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

γ′. Δείξτε ότι το ιδεώδες $\langle x - a\rangle$ του $\mathbb{Z}[x]$ είναι πρώτο αλλά όχι μεγιστικό. Είναι το ιδεώδες που παράγει το $x - a$ *στο δακτύλιο* $\mathbb{Q}[x]$ μεγιστικό; Γιατί;

Άσκηση 7.5 Έστω σώμα F και $F[x, y]$ ο πολυωνυμικός δακτύλιος στις μεταβλητές x, y.

α′. Δείξτε ότι η απεικόνιση
$$\mathrm{ev} : F[x, y] \longrightarrow F, \quad f(x, y) \mapsto f(0, 0)$$
είναι επιμορφισμός δακτυλίων.

β′. Δείξτε ότι το ιδεώδες $\langle x, y\rangle$ του $F[x, y]$ είναι μεγιστικό.

Άσκηση 7.6 Δείξτε ότι το ιδεώδες $\langle 2\rangle$ του $\mathbb{Z}$ είναι μεγιστικό, αλλά το ιδεώδες $\langle 2\rangle$ του $\mathbb{Z}[i]$ δεν είναι.