ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - Εαρινό εξάμηνο 2018-19
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 7

Πρόβλημα 1. Γεωμετρική ερμηνεία τού ότι τό $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ είναι birational με τό $\mathbb{P}^2$: Έστω $\pi : \mathbb{P}^3 \backslash [0,0,0,1] \to \mathbb{V}_p(z_3) \cong \mathbb{P}^2$ η προβολή $\pi[z_0, z_1, z_2, z_3] = [z_0, z_1, z_2]$. Θεωρούμε τό $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ εμβυθισμένο στο $\mathbb{P}^3$ με τήν απεκόνιση Segre και επομένως ισόμορφο με τήν εικόνα του $V = \mathbb{V}_p(z_0 z_3 - z_1 z_2)$. Δείξτε ότι ο περιορισμός τής π στο V επάγει έναν birational ισομορφισμό τού V με το $\mathbb{P}^2$. Βρείτε ανοικτά τών V και $\mathbb{P}^2$ που είναι ισόμορφα κάτω από τήν απεικόνιση π.

Πρόβλημα 2. Δείξτε ότι κάθε quadric τού $\mathbb{P}^n$ τάξης ≥ 3 είναι birationally ισόμορφη με τό $\mathbb{P}^{n-1}$ (χρήση τού θεωρήματος ταξινόμησης τών quadrics μέχρι προβολικού μετασχηματισμού). Ποιό είναι το πρόβλημα όταν η τάξη είναι 2; Varieties birationally ισόμορφες με καποιο $\mathbb{P}^n$ λέγονται *ρητές*.

Πρόβλημα 3. Δείξτε ότι οι παρακάτω καμπύλες C τού $\mathbb{A}^2$ είναι ρητές (τμήσατε με τις ευθείες $y = tx$ για να ορίσετε μια ρητή απεικόνιση $\mathbb{A}^1 \to C$):
α) $C = \mathbb{V}(y^2 - x^3)$.
β) $C = \mathbb{V}(x^3 - y^3 - xy)$.
γ) Για κάθε μια από τις παραπάνω καμπύλες βρείτε τόν επαγόμενο ισομορφισμό σωμάτων $K(\mathbb{A}^1) \to K(C)$.

Πρόβλημα 4. Έστω $C = \mathbb{V}(y^2 - x^3)$, όπως στο πρόβλημα 3α). Δείξτε ότι $K(C) = k(t)$ ως εξής (τά α), β) συνάγονται απ΄ ευθείας από την θεωρία που έχουμε κάνει):
α) $K(C) \simeq K(C^h)$, όπου $C^h = \mathbb{V}_p(y^2 z - x^3)$.
β) $K(C^h) \simeq K(C')$, όπου $C^h = \mathbb{V}(z - x^3)$.
γ) $A[C'] \simeq k[x]$ ($A[C'] =$ ο δακτύλιος συντεταγμένων τής C').

Πρόβλημα 5. Θεωρούμε την ρητή απεικόνιση $C : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ με $C([x_0, x_1, x_2]) = [x_1 x_2, x_0 x_2, x_0 x_1]$.
α) Δείξτε οτι πράγματι η παραπάνω είναι ρητή απεικόνιση δηλ. ορίζεται σε ανοικτό τού $\mathbb{P}^2$ και δείξτε ότι επάγει έναν birationall ισομορφισμό τού $\mathbb{P}^2$ στον εαυτό του. Δείξτε ότι $C^2 = 1$.
β) Βρείτε ανοικτά U, V τού $\mathbb{P}^2$ τά οποία είναι ισόμορφα κάτω από τήν απεικόνιση C.
γ) Δείξτε ότι $K(\mathbb{P}^2) \simeq k(x, y)$. Βρείτε τον επαγόμενο ισομορφισμό σωμάτων $C^* : k(x, y) \to k(x, y)$.