ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - Εαρινό εξάμηνο 2018-19
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #6

Πρόβλημα 1. α) Δείξτε ότι μια ευθεία τού $\mathbb{P}^2_k$ και μια καμπύλη βαθμού d (δηλ. υπερεπιφάνεια τού $\mathbb{P}^2$ βαθμού d), που δεν περιέχει τήν ευθεία, τέμνονται το πολύ σε d σημεία. Αν τό k είναι αλγεβρικά κλειστό δείξτε ότι, εν γένει, τα σημεία τομής είναι d.
β) Δείξτε ότι τό σύνολο τριών συνευθειακών σημείων στο $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ δεν είναι τομή από quadrics.
γ) Δείξτε ότι τό σύνολο τεσσάρων όχι ανά τρία συνευθειακών σημείων τού $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ είναι τομή από quadrics.

Πρόβλημα 2. α) Δείξτε ότι αν μια ευθεία τού $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ τέμνει μια quadric (δηλ. υπερεπιφάνεια βαθμού 2) σε τρία σημεία, τότε η ευθεία περιέχεται στην quadric.
β) Δείξτε ότι δοδέντων τριών ευθειών τού $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, υπάρχει quadric που τίς περιέχει (δουλέψτε στον χώρο που παραμετρίζει τις quadrics στο $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$).

Πρόβλημα 3. Δείξτε ότι κάθε quadric τάξης 3 στο $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ είναι ισόμορφη ως προς ένα προβολικό μετασχηματισμό τού $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, με τήν εικόνα τού $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ κάτω από την απεικόνιση τού Segre.

Πρόβλημα 4. α) $V = \mathbb{V}_p(Q_1 = z_0z_2 - z_1^2, Q_2 = z_1z_3 - z_2^2, Q_3 = z_0z_3 - z_1z_2) \subset \mathbb{P}^3$. Δείξτε ότι ο μορφισμός $\pi : \mathbb{P}^3 \backslash \mathbb{V}_p(z_0, z_1) \to \mathbb{P}^1$ με $\pi([z_0, z_1, z_2, z_3]) = [z_0, z_1]$, όταν περιοριστεί στο V, ορίζει μορφισμό $\pi : V \to \mathbb{P}^1$ (δηλ. μπορεί να οριστεί και στο σημείο $[0, 0, 0, 1] = V \cap \mathbb{V}_p(z_0, z_1)$). Θυμηθείτε πώς είχαμε κάνει ένα αντίστοιχο παράδειγμα με την προβολή τού $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^1$ από το σημείο $[0, 0, 1]$.
β) Έστω $v_{1,3} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ η απεικόνιση τού Veronese, δηλ. $v_{1,3}([x_0, x_1]) = [x_0^3, x_0^2x_1, x_0x_1^2, x_1^3]$. Δείξτε ότι $C \subset V$ (V όπως στο α)) και κατόπιν, ότι η $v_{1,3} : \mathbb{P}^1 \to V$ έχει ως αντιστροφη τήν παραπάνω $\pi : V \to \mathbb{P}^1$. Αυτό αποδεικνύει, αφ′ ενός, ότι $C = V$ και, αφ′ ετέρου, ότι η $v_{1,3}$ είναι 1-1.
γ) Δείξτε ότι η τομή (οποιονδήποτε) δύο εκ των $\mathbb{V}_p(Q_1), \mathbb{V}_p(Q_2), \mathbb{V}_p(Q_3)$ είναι η ένωση τής C με μιά ευθεία.

Πρόβλημα 5. Θεωρούμε το $\mathbb{P}^5$ ως τόν χώρο παραμέτρων των quadrics στο $\mathbb{P}^2$. Δείξτε ότι τό υποσύνολο X τών σημείων που παραμετρίζει τις διπλές ευθείες (δηλ. τις quadrics τάξης 1) είναι το $v_{2,2}(\mathbb{P}^2)$, δηλ. η Veronese εμβύθιση τού $\mathbb{P}^2$ βαθμού 2.