ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - Εαρινό εξάμηνο 2018-19
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #5

Πρόβλημα 1. Περιγράψτε τις λύσεις των παρακάτω πολυωνυμικών εξισώσεων στο $\mathbb{PR}^2$ (δηλ. βρείτε τί παριστούν στο $U_0 \cong \mathbb{R}^2$ και, επίσης, τα σημεία τομής με τήν ευθεία στο άπειρο $x_0 = 0$).
α) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.
β) $x_1 + x_2 = 0$
γ) $x_0x_1 + x_1x_2 + x_0x_2 = 0$.
δ) $x_1^2 + x_2^2 - x_0x_1 = 0$.
ε) $x_2^2 + x_0x_1 - x_0x_2 - x_1x_2 = 0$.

Πρόβλημα 2. Δείξτε ότι ένα υπερεπίπεδο τού $\mathbb{P}^n$ και μια ευθεία τού $\mathbb{P}^n$, που δεν ανήκει στο παραπάνω υπερεπίπεδο, τέμνονται πάντα σε μοναδικό σημείο. Δείξτε ότι αν $P \in \mathbb{P}^n$ και H υπερεπίπεδο που δεν περιέχει τό P, τότε μπορεί να οριστεί η προβολή $\pi : \mathbb{P}^n \backslash \{P\} \to H \cong \mathbb{P}^{n-1}$.

Πρόβλημα 3. Δείξτε ότι τό πλήθος των μονωνύμων τής μορφής $x_0^i x_1^j x_2^k$ με $i, j, k \geq 0$ και $i + j + k = d$ είναι ίσο με $\binom{d+2}{2}$. Δείξτε ότι αν $p_1, \dots, p_{\frac{d(d+3)}{2}} \in \mathbb{P}^2$, τότε υπάρχει ομογενές πολυώνυμο $f \in k[x_0, x_1, x_2]$ βαθμού d με $p_i \in \mathbb{V}_p(f)$, για κάθε $i = 1, \dots, \frac{d(d+3)}{2}$.

Πρόβλημα 4. Έστω $A \in GL_{n+1}(k)$, ένας αντιστρέψιμος $(n+1) \times (n+1)$ πίνακας. Ορίζουμε τότε $T_A : \mathbb{P}_k^n \to \mathbb{P}_k^n$ με $T_a([x]) = [Ax]$, όπου $[x] \in \mathbb{P}_k^n$.
α) Δείξτε ότι πράγματι η παραπάνω απεικόνιση είναι καλά ορισμένη (δηλ. σέβεται τήν σχέση ισοδυναμίας τών σημείων τώυ προβολικού χώρου). Δείξτε επίσης ότι είναι ισομορφισμός και ότι $T_A = T_{\lambda A}$, για $\lambda \in K^*$. Οι παραπάνω λέγονται προβολικοί μετασχηματισμοί τού $\mathbb{P}_k^n$.
β) Δείξτε ότι αν P_1, P_2, P_3 είναι τρία διαφορετικά σημεία τού $\mathbb{P}^1$ τότε υπάρχει μοναδικός προβολικός μετασχηματισμός T με $T([1,0]) = P_1$, $T([0,1]) = P_2$ και $T([1,1]) = P_3$. Συμπεράνατε ότι για κάθε δύο τριάδες (διαφορτικών) σημείων τού $\mathbb{P}^1$ υπάρχει μοναδικός προβολικός μετασχηματισμός που στέλνει την πρώτη τριάδα στην δεύτερη.
γ) Δείξτε ότι υπάρχει προβολικός μετασχηματισμός T τού $\mathbb{P}^2$ που στέλνει οποιαδήποτε τέσσερα, ανά τρία μή συνευθειακά, σημεία τού $\mathbb{P}^2$ σε οποιαδήποτε τέσσερα, ανά τρία μη συνευθειακά, σημεία τού $\mathbb{P}^2$. Δείξτε ότι ένας προβολικός μετασχηματισμός τού $\mathbb{P}^2$ στέλνει ευθείες σε ευθείες.
δ) Δείξτε ότι αν L_1, L_2, L_3 (αντ. M_1, M_2, M_3) δύο τριάδες ευθειών τού $\mathbb{P}^2$ που, οι ευθείες κάθε τριάδας, δεν περνούν από το ίδιο σημείο. Δείξτε ότι υπάρχει προβολικός μετασχηματισμός T με $T(L_i) = M_i$, για κάθε $i = 1, 2, 3$.
ε) Δείξτε ότι αν $V = \mathbb{V}_p(f) \subset \mathbb{P}^n$ και T προβολικός μετασχηματισμός τού $\mathbb{P}^n$ δείξτε ότι $T(V) = \mathbb{V}_p(f^T)$, όπου f^T ομογενές πολυώνυμου ιδίου βαθμού με τό ομογενές πολυώνυμο f.

Πρόβλημα 5. Μιά επίπεδη καμπύλη βαθμού d είναι ένα προβολικό αλγεβρικό σύνολο $\mathbb{V}_p(f) \subset \mathbb{P}^2$, όπου f ομογενές βαθμού d. Δοδέντων πέντε σημείων τού $\mathbb{P}^2$, όχι ανά τρία συνευθειακών, δείξτε ότι υπάρχει μοναδική ανάγωγη επίπεδη καμπύλη βαθμού 2 που διέρχεται από τά σημεία αυτά. Σημείωση: μέ χρήση τού προβλήματος 3, μπορείτε να υποθέσετε ότι τέσσερα από αυτά τά σημεία είναι τα $[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1], [1,1,1]$.

Πρόβλημα 6. Άσκηση 7.32 από το βιβλίο τού A. Gathmann.