ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2018-19
Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

ΜΕΜ 222 ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 6

Άσκηση 6.1 Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a, b) \neq (0, 0)$ και $d = \text{μκδ}(a, b)$, $m = \text{εκπ}(a, b)$.

α′. Δείξτε ότι $\langle a, b \rangle = \langle d \rangle$.

β′. Δείξτε ότι $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle m \rangle$.

Άσκηση 6.2 Έστω R δακτύλιος, I ιδεώδες του R και $n \in \mathbb{N}$. Συμβολίζουμε με $\mathrm{Mat}_n(R)$ (αντίστοιχα $\mathrm{Mat}_n(I)$, $\mathrm{Mat}_n(R/I)$) το δακτύλιο των $n \times n$ πινάκων με εγγραφές από το δακτύλιο R (αντίστοιχα $I, R/I$).

α′. Δείξτε ότι το $\mathrm{Mat}_n(I)$ είναι ιδεώδες του $\mathrm{Mat}_n(R)$.

β′. Δείξτε ότι η απεικόνιση

$$\begin{aligned} \phi : \mathrm{Mat}_n(R) &\longrightarrow \mathrm{Mat}_n(R/I) \\ (a_{i,j}) &\mapsto (a_{i,j} + I) \end{aligned}$$

είναι επιμορφισμός δακτυλίων.

γ′. Αποδείξτε ότι $\mathrm{Mat}_n(R)/\mathrm{Mat}_n(I) \cong \mathrm{Mat}(R/I)$.

Άσκηση 6.3 Έστω p πρώτος αριθμός.

α′. Δείξτε ότι το σύνολο

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \ : \ a, b \in \mathbb{Z}, \ (a, b) = 1, \ p \nmid b \right\}$$

είναι υποδακτύλιος του $\mathbb{Q}$.

β′. Δείξτε ότι το σύνολο

$$p\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \ : \ a, b \in \mathbb{Z}, \ (a, b) = 1, \ p \nmid b, \ p \mid a \right\}$$

είναι ιδεώδες του $\mathbb{Z}_{(p)}$.

γ′. Εξετάστε τον ομομορφισμό

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)} \\ a &\mapsto a + p\mathbb{Z}_{(p)} \end{aligned}$$

και δείξτε ότι $\mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Άσκηση 6.4 Έστω $\mathcal{A}$ ο δακτύλιος των ακολουθιών ρητών αριθμών και C το σύνολο των ακολουθιών ρητών αριθμών οι οποίες είναι Cauchy. Επίσης, συμβολίζουμε με $\mathcal{N}$ το σύνολο των ακολουθιών του $\mathcal{A}$ οι οποίες συγκλίνουν στο 0.

α′. Δείξτε ότι το C είναι υποδακτύλιος του $\mathcal{A}$.

β′. Δείξτε ότι το $\mathcal{N}$ είναι ιδεώδες του C. Είναι το $\mathcal{N}$ ιδεώδες του $\mathcal{A}$;

γ′. Δείξτε ότι ο $\phi : C \longrightarrow \mathbb{R}$, με $\phi(a_n) = \lim a_n$ είναι επιμορφισμός δακτυλίων. Θεωρήστε δεδομένες τις ιδιότητες του σώματος των πραγματικών αριθμών που γνωρίζετε από την Ανάλυση.

δ′. Δείξτε ότι $C/\mathcal{N} \cong \mathbb{R}$.