ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - Εαρινό εξάμηνο 2018-19
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 4

Πρόβλημα 1. Έστω $X \subset \mathbb{A}^m_k$, $Y \subset \mathbb{A}^n_k$ αλγεβρικά σύνολα και $\phi : X \to Y$ ένας μορφισμός ($\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$, όπου $\phi_i = \overline{F_i}$ η κλάση ενός πολυωνύμου στον δακτύλιο $A(X)$).
α) Αν $V \subset Y$ ένα αλγεβρικό υποσύνολο του Y, δείξτε ότι $\phi^{-1}(V) \subset X$ είναι αλγεβρικό υποσύνολο τού X.
β) Αν ο ϕ είναι επί και τό $\phi^{-1}(V)$ είναι ανάγωγο, δείξτε τότε ότι και το V είναι ανάγωγο.
γ) Δείξτε ότι τό αλγεβρικό σύνολο $V = \mathbb{V}(xz - y^2, yz - x^3, z^2 - x^2y) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ είναι ανάγωγο. Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι $y^3 - x^4, z^3 - x^5, z^4 - y^5 \in \mathbb{I}(V)$ και κατόπιν κατασκευάστε έναν επιμορφισμό $\phi : \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \to V$.

Πρόβλημα 2. Έστω $V = \mathbb{V}(y^2 - x^2(x + 1)) \subset \mathbb{A}^2_k$ και έστω $\phi : \mathbb{A}^1_k \to V$ ο μορφισμός με $\phi(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$ (επιβεβαιώστε ότι πράγματι η εικόνα είναι στο V). Δείξτε ότι ο ϕ είναι επί και ότι αποτυγχάνει να είναι 1-1 ακριβώς για $t = \pm 1$.

Πρόβλημα 3. Έστω $V = \mathbb{V}(x^2 - y^3, y^2 - z^3) \subset \mathbb{A}^3_k$ και έστω $\phi : \mathbb{A}^1_k \to V$ ο μορφισμός με $\phi(t) = (t^9, t^6, t^4)$ (επιβεβαιώστε ότι πράγματι η εικόνα είναι στο V). Δείξτε ότι η απεικόνιση ϕ είναι 1-1 και επί αλλά δεν είναι ισομορφισμός αλγεβρικών συνόλων.

Πρόβλημα 4. Δείξτε ότι κάθε ομογενές πολυώνυμο τού $\mathbb{C}[x, y]$ γράφεται ως γινόμενο γραμμικών ομογενών πολυωνύμων (δηλ. ομογενών πολυωνύμων βαθμού 1).

Πρόβλημα 5. Έστω $f \in k[x_0, \ldots, x_n]$ ομογενές βαθμού d.
α)Δείξτε ότι

$$d\,f = \sum_{i=0}^{n} x_i f_{x_i},$$

όπου f_{x_i} η μερική παράγωγος ως προς x_i.
β) Αν $f = gh$ (g, h πολυώνυμα) δείξτε ότι τα g, h είναι ομογενή πολυώνυμα.

Πρόβλημα 6. Δείξτε ότι τα σημεία $[a_0, \ldots, a_n] \in \mathbb{P}^n_k$ είναι προβολικά αλγεβρικά συνολα.

Πρόβλημα 7. Ένα προβολικό αλγεβρικό σύνολο τής μορφής $H = \mathbb{V}(a_0x_0 + \cdots a_nx_n) \subset \mathbb{P}^n_k$ λέγεται υπερεπίπεδο τού $\mathbb{P}^n_k$ (για $n = 2$ τα υπερεπίπεδα είναι ευθείες).
α) Δείξτε ότι αν $H_1, \ldots, H_m$ υπερεπίπεδα τού $\mathbb{P}^n_k$ με $m \leq n$ τότε $H_1 \cap \cdots \cap H_m \neq \emptyset$.
β) Δείξτε ότι αν H μια ευθεία τού $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ τότε $U_i \cap H$ (αν δεν είναι το κενό σύνολο) είναι πράγματι μια ευθεία τού $U_i \cong \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.
γ) Δείξτε ότι δύο διαφορετικές ευθείες τού $\mathbb{P}^2$ τέμνονται σε ακριβώς ένα σημείο.

Πρόβλημα 8. Έστω $X = \mathbb{V}(x_1^3 - x_1x_2^2 + 1) \subset \mathbb{A}_k^2$. Ταυτίζουμε το $\mathbb{A}_k^2$ με το $U_0 \subset \mathbb{P}_k^2$ και έστω $\overline{X}$ η κλειστή θήκη τού X. Βρείτε τα σημεία τομής τής $\overline{X}$ με την ευθεία στο άπειρο $x_0 = 0$.

Προβλήματα 9-10. Ασκήσεις 4.19, 4.20 από το βιβλίο του W. Fulton. Συμβολισμός: με f^* και I^* στο βιβλίο συμβολίζονται τα f^h και I^h (η ομογενοποίηση πολυωνύμου - ιδεώδους).