

## MEM 222 ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

### Φυλλάδιο Ασκήσεων 5

**Άσκηση 5.1** Έστω  $p$  πρώτος αριθμός και  $\mathbb{Z}_p$  το σώμα με  $p$  στοιχεία.

α'. Δείξτε ότι  $|\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)| = (p^2 - 1)(p^2 - p)$ .

Υπόδειξη: Για τον πίνακα  $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ , πόσες δυνατότητες υπάρχουν για την πρώτη γραμμή; Για κάθε επιλογή διανύσματος για την πρώτη γραμμή, πόσες επιλογές υπάρχουν για τη δεύτερη γραμμή;

β'. Δείξτε ότι  $|\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)| = p(p^2 - 1)$ .

**Άσκηση 5.2** Έστω αβελιανή ομάδα  $G$  και  $G_1, \dots, G_k$  υποομάδες της  $G$ .

α'. Δείξτε ότι η τάξη  $|G_1 \cdots G_k|$  διαιρεί το γινόμενο  $|G_1| \cdots |G_k|$ .

β'. Εάν επιπλέον ισχύει  $G_i \cap G_1 \cdots G_{i-1} G_{i+1} \cdots G_k = \{1\}$  για κάθε  $1 \leq i \leq k$ , δείξτε ότι  $|G_1 \cdots G_k| = |G_1| \cdots |G_k|$ .

**Άσκηση 5.3** Έστω αβελιανή ομάδα  $G$  και υποομάδες της  $G_1, G_2, \dots, G_k$  τέτοιες ώστε  $G = G_1 G_2 \cdots G_k$  και  $G_i \cap G_1 \cdots G_{i-1} G_{i+1} \cdots G_k = \{1\}$  για κάθε  $1 \leq i \leq k$ .

α'. Δείξτε ότι  $G \cong G_1 \times \cdots \times G_k$ .

β'. Δείξτε ότι  $G/G_1 \cong G_2 \cdots G_k$ .

**Άσκηση 5.4** Βρείτε τους στοιχειώδεις κυκλικούς παράγοντες των ομάδων  $\mathbb{Z}_n^*$ , για  $n = 2, 4, 8, 15, 16$ .

**Άσκηση 5.5** Βρείτε τους αναλλοίωτους παράγοντες των ομάδων  $\mathbb{Z}_n^*$  για  $n = 28, 33$ .