ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2018-19
Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

ΜΕΜ 222 ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 4

Άσκηση 4.1 Εάν G είναι κυκλική ομάδα και K υποομάδα της G, δείξτε ότι η G/K είναι κυκλική.

Άσκηση 4.2 Έστω H υποομάδα μίας ομαδας G και K μία κανονική υποομάδα της G. Δείξτε ότι η $H \cap K$ είναι κανονική υποομάδα της H.

Άσκηση 4.3 Έστω ομάδα G. Ορίζουμε το *κέντρο* της G ως

$$Z(G) = \{z \in G \ : \ za = az \ \text{ για κάθε } a \in G\}.$$

Δείξτε ότι το κέντρο της G είναι κανονική υποομάδα της G.

Άσκηση 4.4 Έστω αβελιανή ομάδα G και G_1, G_2 υποομάδες της G.

α′. Δείξτε ότι η απεικόνιση

$$\begin{array}{rcl} \phi : G_1 \times G_2 & \longrightarrow & G_1G_2 \\ (a_1, a_2) & \mapsto & a_1a_2 \end{array}$$

είναι επιμορφισμός ομάδων.

β′. Δείξτε ότι ο ϕ είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν $G_1 \cap G_2 = \{1\}$.

Άσκηση 4.5 Έστω G ομάδα και K_1, K_2 κανονικές υποομάδες της. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\begin{array}{rcl} \phi : G & \longrightarrow & G/K_1 \times G/K_2 \\ a & \mapsto & (aK_1, aK_2) \end{array}$$

α′. Δείξτε ότι ο ϕ είναι ομομορφισμός ομάδων.

β′. Δείξτε ότι ο ϕ είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν $K_1 \cap K_2 = \{1\}$.

Άσκηση 4.6 Δίνονται οι ομάδες $G = \{2^x 3^y 5^z \ : \ x, y, z \in \mathbb{Z}\}$, $G' = \{2^x 3^y \ : \ x, y \in \mathbb{Z}\}$ και $H = \{5^z \ : \ z \in \mathbb{Z}\}$.

α′. Δείξτε ότι η H είναι κανονική υποομάδα της G.

β′. Περιγράψτε τις κλάσεις της ομάδας G/H.

γ′. Δείξτε ότι $G/H \cong G'$.

Άσκηση 4.7 Έστω ομάδα G και K κανονική υποομάδα της G, τέτοια ώστε $(G : K) = p$ πρώτος αριθμός. Εάν H είναι υποομάδα της G δείξτε ότι είτε

α′. $H \leq K$ ή

β′. $G = KH$ και $(H : H \cap K) = p$.

Υπόδειξη: Εάν υπάρχει στοιχείο $a \in H \setminus K$, δείξτε ότι το aK παράγει την ομάδα G/K και στη συνέχεια δείξτε ότι το $g \in G$ γράφεται στη μορφή $g = a^k b$ για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$ και $b \in K$.