ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2018-19
Θεόδουλος Γαρεφαλάκης

ΜΕΜ 222 ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 3

Άσκηση 3.1 Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω ομάδες είναι κυκλικές:

α′. $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{55}$,

β′. $\mathbb{Z}_8^* \times \mathbb{Z}_{11}$,

γ′. $\mathbb{Z}_{11}^* \times \mathbb{Z}_9$,

δ′. $\mathbb{Z}_5^* \times \mathbb{Z}_7^*$.

Άσκηση 3.2 Έστω $n, m \geq 3$ φυσικοί αριθμοί. Δείξτε ότι η ομάδα $\mathbb{Z}_n^* \times \mathbb{Z}_m^*$ δεν είναι κυκλική.

Άσκηση 3.3 Έστω ότι η H είναι η μοναδική υποομάδα της G ταξης m. Δείξτε ότι η H είναι κανονική στη G.

Άσκηση 3.4 Έστω $\sigma = (1\ 2\ 3) \in \mathbb{S}_4$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει ομάδα G και ομομορφισμός $\phi : \mathbb{S}_4 \longrightarrow G$, τέτοιος ώστε $\ker(\phi) = \langle\sigma\rangle$.

Άσκηση 3.5 Έστω $\mathbb{D}_{2n} = \langle\tau, \sigma\rangle$ η διεδρική ομάδα τάξης $2n$ (όπου $\mathrm{ord}(\sigma) = n$ και $\mathrm{ord}(\tau) = 2$) και $k \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η ομάδα $\langle\sigma^k\rangle$ είναι κανονική υποομάδα της $\mathbb{D}_{2n}$ και $(\mathbb{D}_{2n} : \langle\sigma^k\rangle) = 2(k, n)$.

Άσκηση 3.6 Για υποσύνολα H, K της ομάδας G, ορίζουμε το σύνολο $HK = \{hk\ :\ h \in H,\ k \in K\}$. Εάν η H είναι υποομάδα της G και η K είναι κανονική υποομάδα της G δείξτε ότι το HK είναι υποομάδα της G.

Άσκηση 3.7 Έστω H, K κανονικές υποομάδες της G με $H \cap K = \{1\}$. Δείξτε ότι $hk = kh$ για κάθε $h \in H$ και $k \in K$.

Άσκηση 3.8 Δείξτε ότι μία μη τετριμμένη ομάδα G δεν έχει καμία γνήσια υποομάδα αν και μόνο αν είναι κυκλική με τάξη πρώτο αριθμό.